2

APOLLONII CONICA:

Methodo Nova Illustrata, & Succinctè DEMONSTRATA.

Per *ISAACUM BARROW*,

Ex-professorem Lucasianum *Cantab.* & Soc. Regiæ Soc.

LONDINI,

Excudebat *Guil. Godbid*, vœneunt apud *Robertum Scott*, in vico Little-Britain. 1675.

De Apollonio Pergæo, ex Vossio de Scriptoribus Mathematicis:

Proximæ post *Euclidem* antiquitatis, ex iis qui extant est Apollonius Pergæus, Claruit enim sub Ptolomæo Evergete.

N*Atus est Pergæ, civitate Pamphiliæ. De ætate autem ejus, quod dixi auctor est* Heraclius *in* Archimedis *vita, & exinde* Eutocius Ascalonita *initio commentariorum in Conica* Apollonii. *Ubi ex* Gemini *Mathematicarum præceptionum libro sexto refert, ut ob conicam hanc scientiam à suæ ætatis hominibus nuncupatus sit* magnus Geometra, Euclidis *discipulos, quod & ipsum ætatem indicat*, Alexandriæ *audivit, à quibus cum multa accepisset; non difficile adeò fuit quatuor conicorum* Euclidis *libros commentario illustrare, ac totidem alios adjungere: ut in universum conicorum essent libri viij: sicut auctor est Pappus* Alexandrinus *libro vij Mathematicæ Collectionis.* Pag. 54.

Atque eodem libro alia quoque ejusdem Apollonii *memorat, videlicet libros duos* περὶ λόγου ἀποτομῆς, de proportionis sectione: *totidem* περὶ χωρίου ἀποτομῆς, de spatii sectione: *etiam duos* διωρισμένης τομῆς, determinatæ sectionis: *ac totidem* ἐπαφῶν, tactionum: *duos quoque* νεύσεων, inclinationum: *ac similiter duos* τόπων ἐπιπέδων, planorum locorum. *Quorum* Pappus *alios vocat* ἑστηκότας, in se solis consistentes: *alios* διεξοδικοὺς, extra sese tendentes. Pag. 55.

Cæterùm fuere olim, qui Conica non esse Apollonii Pergæi, *sed* Archimedis *putarent. Existimavit hoc* Heraclius *ille, qui* Archimedis *vitam retulit. Ejus verba inde adducit* Eutocius, *quibus ait* Archimedem *primum omnium consignasse* Elementa Conica: Apollonium *autem, cùm ea sciret necdum edita esse ab auctore, involâsse in illa, proque suis edidisse. Ac videtur id posse ipsius* Archimedis *verbis comprobari. Nam ipse operis de Conicis Elementis meminit partim libro* περὶ κωνοειδέων, καὶ σφαιροειδέων, *ante propositionem quartam. Utrobique enim ait, id, de quo loquitur demonstratum esse in libris Conicis. Nisi quis censeat, respici* Euclidis *quatuor Conicorum libros: quorum* Pappus *mentionem facit in septimo Mathematicarum Collectionum libro. Verum, si alienum opus signaret* Archimedes *non sic loqueretur. Solet enim tum dicere, priores id demonstrasse. Et sanè* Archimedi *non fuisse ignotum conos secari posse planis, quæ ad latus Coni habeant inclinationem differentem, satis comprobat contra* Eutocium, *& alios*, Guido Ubaldus *initio Commentarii in secundum* ἰσορροπικῶν Archimedis. *Quæ cùm considero, nolim de auctore multùm contendere. Et fortasse rudiores* Archimedis *chartas nactus fuit* Apollonius, *atque eas perfecit. Utcunque est, ante hæc de Conicis edita ab* Apollonio, *imperfecta erat eorum notitia: ut tradit* Eutocius Ascalonita Pag. 434.

initio

initio Commentarii sui in Conica Apollonii. *Atque,* Aristæi *judicio,* Pappi *eadem mens fuit.*

Quatuor priores libros primus transtulit Joan. Baptista Memmius; *sed infeliciter, eò quòd Argumentum operis non intelligeret: unde, non vidit sat manifestas Græci codicis mendas, ac sæpe pueriliter hallucinatur: sicut monitum* Francisco Maurolyco, *præfatione in Cosmographiam suam. Operæ igitur fecit* Federicus Commandinus; *qui denuo Latinè vertit, Bononiæque edidit anno* 1566. *Nec tamen omnia in eo vertendo potuit* Commandinus. *Usque adeo corruptus erat Græcus codex, quare in Latinis vitiosum sequi codicem est coactus; ut ipse agnoscit.*

Alia quoque Apollonii *hujus citant* Proclus *in* Euclidem, *ubi laudatur* Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος ἐν τῷ Ὠκυτοβόῳ. *Fortasse rescribendum* τῇ Ὠκυβόῃ. *Quæ vox fuerat à* βοῇ *significante pugnam: ut sæpe apud* Homerum: Ὠκυβόαι, ταχυμάχαι. *Et quædam recenset* Eutocius Ascalonita *libro de dimensione Circuli,* Eutocius *hic etiam in* Conica Apollonii *commentatus fuit. Eum quoque commentarium Latinè vertit* Commandinus. *Utcunque verò nunc * quatuor duntaxat Conicorum libros habeamus, Arabicè tamen tres præterea ex Oriente est nactus Clarissimus* Jacobus Golius, *antehac, in Academia Leidensi, collega conjunctissimus. Cui multum Arabicæ debent literæ ac Mathesis universa: plura verò propediem debebunt; presertim ubi tres illi Conicorum libri viderint lucem. Quærat aliquis quid factum sit de libro octavo, Cognoscimus de hoc ex Codice Goliano: ubi ad Calcem erat adscriptum eò non fuisse Arabicè translatum; quia etiam liber ille desideraretur in Codicibus Græcis, unde Arabes cætera transtulissent. Sed doctissimus* Mersennius, *præfatione in* Apollonii *Conica; quæ sunt in ejus* Συνόψει *Mathematica; Arabicè illum extare ait: imò omnes* Apollonii *libros eâ linguâ legi; sane plures etiam, quam enumerarit* Pappus. *Atque horum testem citat* Aben Nedin; *qui librum contexuit de Philosophis Arabibus, omniumque eorum scripta memoravit, qui fuere à quadringentesimo post* Muhammedem *anno. Interim (ut idem* Mersennius *addit)* Claudii Mydorgii, *patricii Parisini, ea est suspicio tres illos Conicorum libros, qui ab Arabibus* Apollonii *creduntur non esse genuinos, verùm ab aliquo suppositos, qui sub* Apollonii *nomine facere voluerit fucum. Atque hoc inde colligit; quod libro quinto prima Proposit. in vj.* Apollonii *non tantummodo in Cono recto, sed in Scaleno etiam quolibet, & portionibus quibusvis, demonstret possibilia quæque. Meminit auctoris quoque* Vitruvius, *lib.* I. *cap.* I. Cardanus *in* 16 *de Subtilitate ei septimum inter subtilia orbis ingenia tribuit locum.*

*Anno 1650. antequuam tres posteriores à Borellio ederentur.

APOL-

APOLLONII CONICORUM LIB. I.

DEFINITIONES.

I.

SI ab aliquo puncto (A) ad circumferentiam Circuli (B H C,) qui non sit in eodem plano, in quo punctum, conjuncta recta linea (A B) in utramque partem producatur, & manente puncto (A) convertatur circa circuli circumferentiam, quousque ad eum locum redeat, à quo cœpit moveri; superficiem (D A E F G) à recta linea descriptam, constantemq; ex duabus superficiebus (D A G, E A F) ad verticem (A) inter se aptatis, quarum utraque in infinitum augetur, nimirum recta linea (E A B D) quæ eam describit in infinitum aucta, voco *Conicam superficiem.* Fig. 1.

II.

Verticem ipsius, manens punctum (A).

III & VI.

Axem, rectam lineam (A G), quæ per punctum (A), & circuli centrum (G) ducitur.

IV.

Conum autem voco figuram (A B C), contentam circulo (B H C), & conicâ superficie (B A C), quæ inter verticem, & circuli circumferentiam interjicitur.

V & VII.

Basim, circulum ipsum (B H C).

VIII.

Conorum rectos voco, qui axes habent ad rectos angulos ipsis basibus.

IX.

Scalenos, qui non ad rectos angulos ipsis basibus axes habent.

X.

Fig. 2. Omnis curvæ lineæ (A B C) in uno plano existentis *Diametrum* voco, rectam lineam (B D,) quæ quidem ducta à linea curva, omnes lineas (A C), quæ in ipsa ducuntur cuidam lineæ (A C) æquidistantes, bifariam dividit.

XI.

Verticem lineæ rectæ terminum (A,) qui est in ipsa linea (A B C.)

XII.

Ordinatim ad diametrum *applicari* dicitur, unaquæque æquidistantium linearum (A C.)

XIII.

Fig. 3. Similiter, & duarum curvarum linearum (C A D, E B F) in uno plano existentium, *diametrum* quidem *transversam* voco, rectam lineam (A B), quæ omnes (C D, E F) in utraque ipsarum ductas, rectæ cuidam (C D, vel E F) æquidistantes bifariam dividit (in X.)

XIV.

Vertices, diametri terminos (A, B) qui sunt in ipsis lineis (C A D, E B F.)

XV.

Rectam verò *diametrum* (Z Y) voco, quæ inter duas lineas (C A D, E B F)

E B F) posita, lineas omnes (C E, D F) ductas rectæ cuidam (A B) æquidistantes, & inter ipsas interjectas, bifariam secat (in Z vel Y.)

XVI.

Ordinatim ad diametrum applicari dicitur unaquæque linearum æquidistantium (C D, vel E F ad A B; & C E, vel D F ad Z Y.)

XVII.

Conjugatas diametros voco curvæ lineæ (A Z B Y), & duarum curvarum (C A D, E B F) rectas lineas (A B, Z Y), quarum utraque diameter est, & rectas lineas (C D, C E) bifariam dividit. Fig. 4.

XVIII.

Axem verò curvæ lineæ, & duarum curvarum, rectam lineam, quæ cùm sit diameter curvæ lineæ, vel duarum curvarum, æquidistantes ad rectos secat angulos.

XIX.

Axes conjugatos curvæ lineæ, & duarum curvarum, rectas lineas, quæ cùm sint diametri conjugatæ, ipsis æquidistantes ad rectos angulos secant.

Nihilo differunt axes à diametris, nisi quòd indifferenter illæ, hi ad rectos tantùm secent.

Apollonius Eudemo.
S. D.

SI & corpore vales, & aliæ tuæ res ex animi tui ſententia ſe habent, bene eſt; nos quidem ſatis bellè habemus. Quo tempore tecum *Pergami* fui, animadverti te cupidum intelligendi Conica, quæ à nobis conſcripta ſunt. Itaque miſi ad Te primum librum emendatum, reliquos deinceps miſſurus, cùm animo ero tranquilliori; non enim arbitror te oblitum quod à me accepiſti, quid ſcilicet cauſæ fuerit cur ego hæc ſcribere aggreſſus ſim; rogatus à *Naucrate* Geometrâ, quo tempore *Alexandriam* veniens apud nos fuit; & cur nos, cùm de illis octo libris egiſſemus, majorem ſtatim in his diligentiam adhibuimus. Nam cùm ipſe *Naucrates* quamprimum eſſet navigaturus, nos ea non emendavimus, ſed quæcunque ſeſe nobis obtulerunt conſcripſimus, utpote qui ea poſtremò eſſemus percurſuri. Quamobrem nunc tempus nacti, ut quæque emendamus, ita edimus. Et quoniam accidit nonnullos alios ex iis, qui nobiſcum fuerant, habuiſſe primum & ſecundum librum antequam emendaretur, noli mirari, ſi in quædam incidas, quæ aliter ſe habeant. Ex octo autem libris, quatuor primi hujus diſciplinæ continent Elementa: quorum primus complectitur generationes trium Coni ſectionum, & earum quæ oppoſitæ dicuntur, itemq; principalia ipſarum accidentia, à nobis & uberiùs & univerſaliùs, quàm ab iis qui de ea re ſcripſerunt elaborata. Secundus Liber tractat ea quæ attinet ad Diametros, & ad Axes Sectionum, & ad illas lineas *quæ cum ſectione non conveniunt; tum de aliis diſſerit, quæ & generalem & neceſſariam utilitatem ad determinationes afferunt. *Tertius liber continet multa & admirabilia Theo-

*ἀσυμπτώτως.

Theoremata, quæ utilia erunt & ad solidorum locorum compositiones, & ad determinationes; quorum complura & pulcherrima, & nova sunt. Hæc nos perpendentes animadvertimus, non positam esse ab *Euclide* rationem componendi loci ad tres & quatuor lineas, verùm ipsius tantummodo particulam quandam, atque hanc non satis feliciter. Neque enim fieri poterat, ut ea compositio rectè perficeretur absque iis, quæ à nobis inventa sunt. Quartus liber tradit quot modis Conorum sectiones inter sese, & circuli circumferentiæ occurrere possint, & multa alia ad pleniorem doctrinam, quorum nihil ab iis, qui ante nos fuerunt, memoriæ proditum est; coni sectio, & circuli circumferentia, & oppositæ sectiones ad quot puncta oppositis sectionibus occurrant. Reliqui autem 4 Libri ad abundantiorem scientiam pertinent. Etenim Quintus de Minimis & Maximis magna ex parte agit. Sextus de Æqualibus, & similibus Coni sectionibus. Septimus continet Theoremata, quæ determinandi vim habent. Octavus Problemata Conica determinata. At verò omnibus his editis, licet unicuique, qui in ea legendo inciderit, ex animi sui sententia judicare. Vale.

LIB. I.

Prop. I.

Rectæ lineæ (A G) quæ à vertice (A) superficiei Conicæ ad puncta (G) quæ in superficie sunt, ducuntur, in ipsa superficie erunt. Fig. 5.

Cùm enim puncta A G sint in superficie conica, (*a*) recta ipsam describens per puncta A, G transibit. Itaque liquet tunc rectam A G in superficie conica existere. a *1. def. 1. hujus.*

Coroll. 1. Hinc constat, si à vertice ad aliquod punctum eorum quæ sunt intra superficiem, recta linea ducatur, intra, & si ad aliquod eorum quæ sunt extra, extra superficiem cadere. *Cor.*

Coroll. 2. Rectæ à vertice ad puncta, quæ in superficie, ductæ, basis circumferentiæ occurrent, si opus est, protractæ.

Prop. II.

Fig. 6. Si in alterutra superficierum, quæ sunt ad verticem, sumantur duo puncta (D,E), & quæ puncta conjungit recta linea (D E) ad verticem non pertineat, intra superficiem cadit, quæ verò est in directam (E F) cadet extrà.

a 2 *Cor.* 1. 2 *hujus.* b 2. 3. c 2. 11. d 10. 3. e 1. *Cor.* 1 *hujus.*

Conjungantur rectæ A D, A E [a] occurrentes basis circumferentiæ punctis B,G, quæ connectat recta B G; hæc[b] intra circulum cadet, ac proinde intra superficiem conicam; ergo [c] planum trianguli A B G est intra superficiem conicam; ergo recta D E in ipso sita [c] est intra eandem. Porro recta A F [d] cadit in B G protractam extra circulum; & [e] proinde extra superficiem conicam; ergo punctum F est etiam extra ipsam.

Prop. III.

Fig. 7. Si conus (A B C) plano per verticem (A) secetur, sectio (A B C) triangulum erit.

a 1. *hujus.* b 3. 11. c 20. *def.* 1.

Nam A B & A C [a] rectæ sunt: item B C [b] est recta. [c] ergo ABC est triangulum.

Prop. IV.

Fig. 8. Si alterutra superficierum, quæ sunt ad verticem, secetur plano (D H E) æquidistante circulo (B K C), per quem fertur recta linea superficiem describens, planum (D H E) quod superficie concluditur, circulus erit, habens centrum (G) in axe (A F); figura verò (ADE) contenta circulo (D H E) & ea parte superficiei conicæ, quæ inter secans planum (D H E), & verticem (A) interjicitur, conus erit.

a 3. *hujus.* b 3. 11. c 2. *Cor.* 1. *hujus.* d *hyp* & 16. 11. e 4. 6. f *hyp* & 15. *def.* 2. g 14. 5.

Planum per axem A F faciat [a] trigonum A B C; communisque sectio ejus cum plano D H E [b] sit recta D F. In sectione D H E sumatur punctum utcunque H, ducaturque recta A H K [c] circumferentiæ basis occurrens in K, & connectantur G H, F K. Atq; ob D E, B C, ac G H, F K [d] parallelas, erit F B. G D [e] :: (A F. A G [e] ::) F K. G H. unde cùm F B F K [f] æquentur. [g] erunt etiam G D, G H æquales. idémque de reliquis à G ad sectionem ductis rectis ostendi poterit, Unde

de sectio D H E [h] circulus erit, cujus centrum G, & [k] proinde figura A D E conus. h 15. def. 1. k 4 def. hujus.

Coroll. 1. Recta D E est diameter circuli D H E. l

2. Conus A D E [m] similis est cono A B C (ob A G. G D :: A F. F B.) m 24 def. 11.

Prop. V.

Si conus Scalenus secetur plano (A B C) per axem ad rectos angulos ipsi basi (B C), secetúrque altero plano (G H K) ad triangulum per axem recto, quod ex parte verticis (A) abscindat triangulum (A G K) simile (ei A B C) quod per axem, * subcontrariè vero positam; sectio (G H K) circulus erit. Vocetur autem Sectio subcontraria. Fig. 9.

In sectione G H K accipiatur punctum H utcunque; à quo [a] ducatur H F recta plano A B C, quæ [b] in rectam G K cadet, & quidem [c] perpendiculariter, puta in F. per F ducatur D E ad B C parallela; estque planum per D E, H F [d] parallelum basi B C; [e] efficitque sectionem D H E circulum, in quo F D × F E [f] = F Hq. Quia verò ang. A D E [g] = (ang. A B C [h] =) ang. A K G, & ang. K F E [k] = G F D; æquiangula erunt trigona K F E, D F G. unde E F. F K [l] : : G F. F D. ergo F K × G F [m] = (E F × F D [n] =) H Fq. [o] quare sectio G H K est circulus. Q.E.D.

a 11. 11. b 38. 11. c 3. def. 11. d 15. 11. e 4. hujus. f 35. 3. g 29. 1. h hyp. k 15. 1. l 4. 6. m 16. 6. n priùs. o conv. 35. 3.

Prop. VI.

Si conus plano (A B C) per axem secetur, sumatur autem aliquod punctum (D) in superficie coni, quod non sit in latere trianguli per axem; & ab ipso ducatur recta linea (D E) æquidistans cuidam rectæ (M N), quæ perpendicularis est à circumferentia circuli (B M C) ad trianguli basin (B C); triangulo per axem occurret, & ulteriùs producta usque ad alteram superficiei partem, bifariam ab ipso triangulo secabitur. Fig. 10.

Recta A D protracta circumferentiæ basis occurrat puncto K; per quod ducatur K H L ad M N parallela; [a] adeóque ad D E. [b] ergo D E producta occurret rectæ A H, puta in F. Producatur D F ad superficiem G. a 30. 1. b

Liquet rectam A L, (cùm sit in plano A D E, vel A K L, & in superficie coni) ipsi D F occurrere in G. & fore K H. D F : : (A H. A F : :) H L. F G. unde quum sit K H = H L, erit D F = F G. *Q. E. D.*

Prop.

Propos. VII.

Fig. 11. Si conus plano (A B C) per axem secetur, secetur autem & altero plano (D F E) secanti planum basis coni, secundùm rectam lineam (D E) quæ sit perpendicularis, vel ad (B C) basim trianguli per axem, vel ad eam, quæ in directum ipsi constituitur: lineæ (H K) quæ à sectione (D F E), in superficie coni à plano facta, ducuntur æquidistantes ei (D E), quæ est perpendicularis ad trianguli basim (B C), in communem sectionem (F G) plani secantis, & trianguli per axem, cadent. Et siquidem conus sit rectus linea (D E), quæ est in basi, perpendicularis erit ad (F G) communem sectionem plani secantis, & trianguli per axem, si verò Scalenus, non semper, nisi cùm planum (A B C), quod per axem ducitur ad basim coni (B D C E) rectum fuerit.

Quòd H K plano A B C, & proinde ejus cum plano D F E communi sectioni F G occurrat, inque ipso occursu bisecetur, liquet ex præcedenti. Porro, si conus rectus sit, erit circulus B C plano A B C
a 4. *def.* 11. rectus; [a] ac ideo D E plano A B C recta; & propterea D E ad F G perpendicularis. Idem discursus valet, si trigonum A B C circulo B C utcunque rectum fuerit; sin hoc non fuerit, non erit D E ad F G per-
b 4. 11. pendicularis: Nam si D E utrique B C, F G perpendicularis sit, [b] erit
d 18. 11. eadem D E recta plano A B C; [d] unde circulus B C trigono A B C rectus erit, contra Hypoth.

Coroll. Hinc F G diameter est sectionis D F E, utpote quæ rectas ad D E parallelas bisecat.

Prop. VIII.

Fig. 12. Si conus secetur plano (A B C) per axem, & secetur altero plano (D F E) secanti basim coni (B D C) secundùm rectam lineam (D E), quæ ad (B C) basim trianguli per axem sit perpendicularis; diameter autem (F G) sectionis factæ in superficie, vel æquidistet uni (A C) laterum trianguli, vel cum ipso extra coni verticem conveniat; & producantur in infinitum tum superficies coni (A B C) tum planum secans (D F E); sectio quoque ipsa (D F E) in infinitum augebitur; & ex diametro (F G) sectionis ad verticem cuilibet lineæ datæ æqualem (CFH) abscindet linea (M N H), quæ quidem à coni sectione (MFN) ei (D E) quæ est in basi, æquidistans ducta fuerit.

Nam

Nam quia diameter F G cum latere A C ad partes X [a] nunquam conveniet, si ipsa ad [b] libitum producatur, puta ad H, & per H ducantur K L ad B C, & M N ad D E parallelæ, [c] planum per K L, M N plano B D C E parallelum erit, inque superficie coni producta [d] circulum efficiet, ad quem si protrahatur planum D F E, liquet [d] augeri conum, & sectionem D F E &c.

a *Hypoth.*
b 3. 1.
c 15. 11.
d 4. *hujus.*

Prop. IX.

Si conus (A B C) secetur plano (D K E) convenienti cum utroque latere (A B, A C) trianguli per axem, quod neque basi (B C) æquidistet, nec subcontrariè ponatur, sectio (D K E) circulus non erit. Fig. 13.14.

Si fieri potest, sit D K E circulus; & ab H basis centro ad F G (communem sectionem basis cum plano secanti) ducatur perpendicularis H G, per quam & axem transeat trigonum A B C. Dein sumatur quodvis punctum K in linea D K E, per quod ducatur K M L ad F G parallela, occurrens rectæ D E G (communi sectioni plani secantis, & trigoni A B C) in M. [a] unde K M = M L.

Porrò, per M ducatur N X ad B G parallela. & quia planum per N X, K L, [b] plano B C parallelum est, * ideóque circulum efficit. In quo K L [b] diametro N X [c] est perpendicularis, erit N M × M X [d] = (K Mq ([d] =) D M × M E. ([e] ob D K E circulum). [f] ergo N M. B M :: M E. M X. [g] ergo trigona N M D. E M X similia sunt: & ang. M E X = (ang. D N M [h] =) ang. A B C. Itaque sectio est [k] subcontraria, contra Hyp. ergo sectio D K E non est circulus. *Q. E. D.*

a 6. *hujus.*
b 15. 11.
* 14. *hujus.*
c 10. 11. (6.
d *cor.* 13. & 16.
e *hyp.*
f 17. 6. g 6. 6.
h 29. 1.
k 5. *hujus.*

Prop. X.

Si in coni sectione (F E D) sumantur duo puncta (G, H); recta linea (G H), quæ ejusmodi puncta conjungit, intra sectionem cadet, & quæ in directum ipsi constitnitur, cadet extra. Fig. 15.

Nam quia puncta G H [a] sunt extra latus trigoni (A B C) per axem ducti, recta G H non pertinget ad verticem A; [b] ergo hæc intra conum cadet, ac proinde intra sectionem; sin producatur extra conum cadet, ac proinde extra sectionem.

a *hyp.*
b 2. *hujus.*

Prop. XI.

Si conus plano (A B C) per axem secetur; secetur autem & altero Fig. 16.

plano (D F E), secante basim coni secundùm rectam lineam (D E), quæ ad basim (B C) trianguli per axem sit perpendicularis, & sit sectionis diameter (F G) uni (A C) laterum trianguli per axem æquidistans; recta linea (K L) quæ à sectione ducitur æquidistans sectioni (D E) plani secantis, & basis coni, usque ad sectionis diametrum (F G), poterit spatium æquale contento, lineâ (F L), quæ ex diametro abscissa inter ipsam (K L) & sectionis verticem (F) interjicitur, & alia quadam (F H) quæ ad lineam (A F) inter coni angulum (A) & sectionis verticem (F) interjectam, eam proportionem habeat, quam quadratum basis (B C) trianguli per axem, ad id quod reliquis duobus trianguli lateribus (A B, A C) continetur. Dicatur autem hujusmodi sectio PARABOLE.

a 15. 11.
b 4. *hujus.*
c 10. 11.
d *cor.* 13. & 16. 6. e 1. 6.
f *hypoth.*
g 23. 6.
h 4. 6.
k 2. 6. 19. 5.

Per L ducatur M N ad B C parallela; éstque sectio plani per M N, K L ducti (ad B D C E [a] paralleli) [b] circulus; [c] & K L ad M N perpendicularis; [d] unde K Lq = M L × L N. Porro F L × H F. F L × F A [e] :: (H F. F A [f] :: B Cq. A C × A B [g] = B C. A C. [h] (M L. F L) + B C. A B [h] (M L. F M, [k] vel L N. F A) = M L. F L + L N. F A [g] =) M L × L N. F L × F A. [l] ergo M L × L N ([d] K Lq) = F L × H F. *Q. E. D.*

Propos. XII.

Si conus plano (A B C) per axem secetur; secetur autem & altero

Fig. 17. plano (D F E) secanti basim coni secundùm rectam lineam (D E) quæ ad basim (B C) trianguli per axem sit perpendicularis; & sectionis diameter (F G) producta, cum uno latere (A C) trianguli per axem extra verticem coni conveniat in (H): recta linea (M N), quæ à sectione ducitur æquidistans communi sectioni (D E) plani secantis, & basis coni usque ad sectionis diametrum, poterit spatium (F N X P) adjacens lineæ (F L), ad quam ea (F H), quæ in directum constituitur diametro sectionis, subtenditúrque angulo (F A H) extra triangulum, eandem proportionem habet, quam quadratum lineæ (A K) quæ diametro (F G) æquidistans, ab vertice (A) sectionis usque ad trianguli basim (B C) ducitur, ad rectangulum basis partibus (B K, K C), quæ ab ea fiant, contentum, latitudinem habens lineam (F N), quæ ex diametro abscinditur, inter ipsam (M N), & sectionis verticem (F) interjectam, excedénsque figurâ (F N O L) simili, & similiter positâ ei, quæ continetur lineâ (H F) extra angulum subtensâ, & ea (F L), juxta quam possunt, quæ ad diametrum (F G) applicantur. Vocetur autem hujusmodi sectio *Hyperbole*.

Per

Per N ducatur R S ad B C parallela. Eſtque F N × H N. F N × N X[a] : : (H N. N X)[b] : : H F. F L[c] : : A Kq. B K × K C[d] = A K. B K ([b]F G. G B, [b] vel F N. N R) + A K. K G. ([b]A G. G C. [b] vel H N. N S.) = F N. N R + H N. N S[d] =) F N × H N. N R × N S. ergo F N × N X[e] = (N R × N S[f] =) N Mq. *Q. E. D.*

a 1. 6.
b 4. 6.
c *hyp.*
d 23. 6.
e 9. 5.
f 4. *hujus*, & *cor.* 13, *ac* 16. 6.

Prop. XIII.

Fig. 18.

Si conus plano (A B C) per axem ſecetur, & ſecetur altero plano (E L D) conveniente cum utroque latere trianguli per axem, quod neque baſi coni æquidiſtet, nec ſubcontrariè ponatur; planum autem, in quo eſt coni baſis (B C), & ſecans planum conveniant ſecundùm rectam lineam (F G) quæ ſit perpendicularis vel ad baſim (B C) trianguli per axem, vel ad eam (B C K), quæ in directum ipſi conſtituitur; recta linea (L M) quæ à coni ſectione ducitur, æquidiſtans planorum communi ſectioni (F G) uſque ad ſectionis diametrum (E D) poterit ſpatium (E O X M) adjacens lineæ (E H), ad quam ſectionis diameter (E D) eam proportionem habeat, quam quadratum lineæ (A K) diametro (E D) æquidiſtantis à coni vertice (A) uſque ad trianguli baſin (B C) ductæ, habet ad rectangulum contentum baſis partibus (B K, C K), quæ inter ipſam (A K) & rectas trianguli lineas (A B, A C) interjiciuntur; latitudinem habens lineam (E M), quæ ex diametro (E D) ab ipſa abſcinditur ad ſectionis verticem (E): deficienſque figurâ (O H N X) * ſimili, & ſimiliter poſitâ ei, quæ diametro (E D) & lineâ (E H) juxta quam poſſunt, continetur. Dicatur autem hujuſmodi ſectio *Ellipſis*.

Per M ducatur P M R ad B C parallela. Eſtque E M ×. D M. E M. × M X[a] : : (D M. M X[b] : : D E. E H[c] : : A Kq. B K × K C[d] = A K. B K ([b]E G. G B. vel [b] E M. M P) + A K. K C. ([b]D G. G C. [b] vel D M. M R) = E M. M P + D M. M R[d] =) E M × D M. M P × M R. ergo E M × M X[e] = (M P × M R[f] =) M Lq. *Q. E. D.*

a 1. 6.
b 4. 6.
c *hyp.*
d 23. 6.
e 9. 5.
f 4. *hujus.* & *cor.* 13. & 16. 6.

Prop. XIV.

Fig. 19.

Si ſuperficies (B C A X O), quæ ſunt ad verticem (A), plano non per verticem ſecentur, erit in utraque ſuperficierum ſectio (D E F, & G H K) quæ vocatur Hyperbole. Et duarum ſectionum eadem erit diameter (M E, H N), lineæ verò (E P, H R), juxta quas poſſunt ordinatæ ad diametrum, æquidiſtantes ei, quæ eſt in baſi coni, inter ſe æ-

 quales

quales erunt. Et figuræ transversum latus (E H) utrique commune, quæ scilicet inter sectionum vertices interjicitur. Vocentur autem hujusmodi sectiones *Oppositæ*.

Quòd utraque sectio D E F, G H K, sit Hyperbole, liquet ex 12mâ hujus. Porrò ductâ per A rectâ S A T ad M N parallelâ, est
a 4. 6. A S. B S [a] :: A T. T O. & A S. S C [b] :: A T. T X. Unde A Sq.
b hyp. B S. × S C ([b]hoc est H E. E P) :: A Tq. T O × T X ([b]hoc est E H.
c 9. 5. H R). [c] quare E P = H R.

Prop. XV.

Fig. 20. Si in Ellipsi a puncto (C) quod diametrum (A B) bifariam dividit, ordinatim ducta linea (D C E) ex utraque parte ad sectionem produ-
Fig. 21. catur, & fiat ut producta (D E) ad diametrum (A B), ita diameter (A B) ad aliam lineam (D F): Recta linea (G H) quæ à sectione ducitur ad productam (D E) diametro (A B) æquidistans, poterit spatium (D L) adjacens tertiæ proportionali (D F), latitudinem habens lineam, (D H) quæ inter ipsam & sectionem interjicitur, deficiénsque figurâ (M K) simili ei, quæ continetur lineâ (D E) ad quam ducuntur, & eâ (D F) juxta quam possunt. Quòd si ulterius producatur (G H) ad alteram sectionis partem (V), bifariam secabitur ab ea (D E), ad quam applicata fuerit.

Sit A N linea, juxta quam possunt applicatæ ad A B: junctâque B N, per G ducatur G X ad D E parallela, perque C & X ipsæ X O,
a 13. hujus. C P ad A N parallelæ; & per N, O, P ipsi A B parallelæ N R, O S,
b 4. 6. P T. Liquet igitur esse D Cq [a] = rectang. A P. & G Xq [a] = re-
c hyp. ctang. A O. Et ob A N. C P. (A T) [b] :: (A B. C B [c] :: 2. 1.) erit
d 1. 6. T N = A T. [d] unde rectang. A P = N P. [d] & rectang. X T [d] =
e 2. ax. 1. Y T [e] = N S (ob T O [f] = R O). ergo rectang. A O. ([a] G Xq) +
f 43. 1. O P [e] = (rectang N P [d] = A P [a] = C Dq [g] =) H Cq (G Xq) +
g 5. 2. H E × H D. & proinde rectang. H E × H D [h] = rectang. O P. (P S
h 3. ax. 1. × S O). Item H E × H D. H L × H D [k] :: (H E. H L [l] :: D E. D F [m] ::
k 1. 6. D Eq. A Bq ([n] ob D E, A B, D F ∺) [o] :: C Dq ([a] P C × C A, vel
l 4. 6. P C × C B). C Bq [p] :: P C. C B [k] :: P S. S O [q] ::) P S × S O. [a](H E
m cor. 20. 6. × H D). S Oq. ergo H L × H D q = (S O q [r] =) H Gq. Quod erat
n hyp. primum. Porrò, ductis V Q ad G X, & Q Z ad A N parallelis, propter
o 15. 5. A X × X O [a] = (G Xq [r] = V Q q [a] =) A Q × Q Z [s], erit A Q. A X [s] ::
p 22. 6. (X O. Q Z [l] ::) X B. Q B. ergo dividendo X Q. X A :: X Q. Q B.
q 9. 5.
r 34. 1.
s 14. 6.

quare

quare XA = QB. item CA [v] = CB. [x] ergo CX = CQ; [t] hoc est HG = HV. Quod erat secundum. t 9. 5: v hyp. x 3. ax. 1.

Coroll. Itaque DE est diameter altera priori AB conjugata.

Schol.

Breviùs ita Calculum instituemus.

Sint $\begin{cases} BC, \text{ vel } CA = d. \\ AN = r. \\ CX, \text{ vel } HG = a. \end{cases}$ Fig. 22.

Est igitur $\begin{cases} BX = d + a. \\ AX = d - a. \end{cases}$

Est autem $2d. r :: d+a. \frac{r}{2} + \frac{ra}{2d}$ quare $d-a$ (AX) $\times : \frac{r}{2} + \frac{ra}{2d}$, hoc est $\frac{dr}{2} - \frac{raa}{2d}$ = GXq vel HCq. Item quia $2d. r$ (BA. AN) :: d. (BC). $\frac{r}{2}$. erit d (BC) $\times \frac{r}{2}$, h.e. $\frac{dr}{2}$ = DCq. Ergo DCq − HCq (h. e. HE × HD) = $\frac{raa}{2d}$. Porrò quia DCq. BCq (hoc est $\frac{dr}{2}$. dd) :: DEq. ABq :: DE. DF (ob DE, AB, DF ∺) :: HE. HL :: HE × HD. $\left(\frac{raa}{2d}\right)$. HL × HD :: $\frac{dr}{2}$. dd :: $\frac{r}{2}$. d :: $\frac{raa}{2d}$. aa. Erit HL × HD = aa = HGq.

Simili discursu erit HL × HD = HVq. unde HG = HV.

Prop. XVI.

Si per punctum (C), quod transversum latus (AB) oppositarum sectionum bifariam dividit, recta quædam linea (CD) ordinatim applicetur, ipsarum diameter erit, priori diametro (AB) conjugata. Fig. 23.

Recta quæpiam GH ad AB parallela sectionibus occurrat punctis G, H, à quibus ordinatim applicentur GK, HL; sintque AE. BF recta sectionum latera; & junctæ AF, BE producantur; ducanturque KM, LN ad AE, BF parallelæ. Estque AK × KM [a] = (GKq [b] = HLq [a] =) BL × LN. Item AK × KM. AK × KB [c] :: (KM. KB [d] :: AE. AB [e] :: BF. BA [d] :: LN. LA [c] :) BL × LN. BL × LA. ergo (ob AK × KM [f] = BL × LN) [g] erit AK × KB = BL × LA. [h] quare KB. BL :: LA. AK. & componendo KL

a 13. *hujus.*
b 34. 1.
c 1. 6.
d 4. 6.
e 14. *hujus. et 5.* prius.
f *priùs.*
g 14. 5.
h 14. 6.

k 9. 5. KL. BL :: LK. AK. [k] ergo BL = AK. & [l] proinde CL = CK;
l hyp. & 3. ax. [m] hoc est XH = XG. [n] ergo CD est diameter, quippe quæ ipsam
m 34. 1. GH, & similiter omnes ad AB parallelas bisecat.
n 12. def. hujus.

Coroll. 1. Si GK = HL, erit AK = BL; & BK = AL. ac inde $BK \times AK = AL \times BL$.

2. Vicissim, si AK = BL, vel BK = AL. erit GK = HL. & $BK \times AK = AL \times BL$.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

Fig. 24. 25. 1. Punctum (C), quod hyperbolæ, & ellipsis diametrum (AB) bifariam dividit, Centrum sectionis dicatur.

2. Et quæ à centro (C) ad sectionem perducitur (CB) vocetur ex centro sectionis.

3. Similiter & punctum (C) quod transversum latus (AB) oppositarum sectionum bifariam dividit, Centrum vocetur.

4. Quæ autem (DE) à centro ducitur æquidistans ei (GK), quæ ordinatim applicata est, mediámque proportionem habet inter latera figuræ (AB, BF) & bifariam secatur à centro (C), secunda diameter appellatur.

Brevitatis causâ, Transversum latus, Rectum latus, & secundam diametrum elementis T, R, M designabimus: unde

* Cor. 20. 6. *Coroll.* * Tq. Mq :: T. R. (ob T, M, R $\div\div$.)
& $CDq = \frac{1}{4} DEq = \frac{Mq}{4} = \frac{1}{4} TR$.

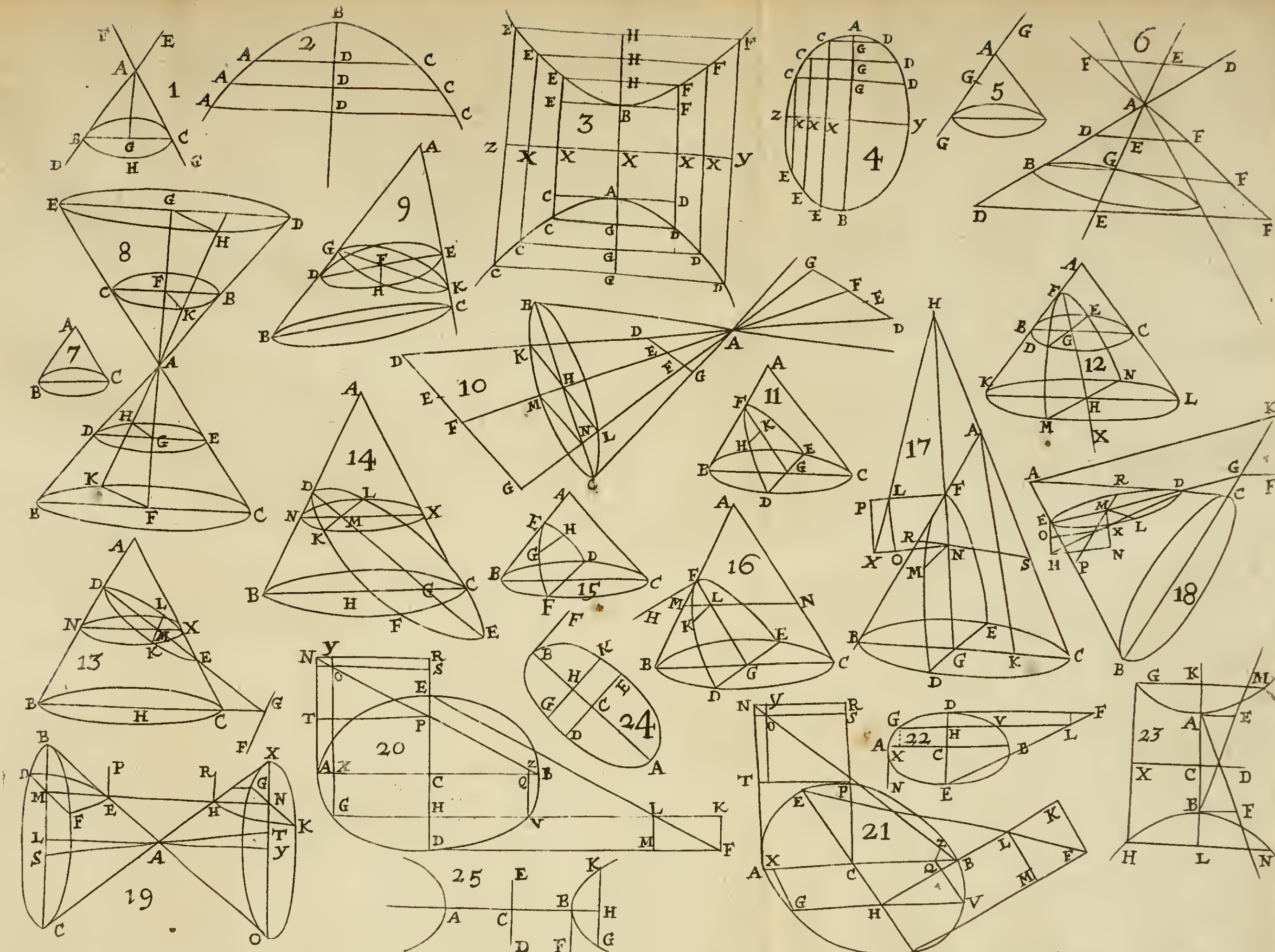
Viam jam munit ad singularum sectionum proprietates primas, & præcipuas eliciendas.

Prop. XVII.

Fig. 26. Si in coni sectione (CAD), ab ipsius vertice (A) ducatur recta linea (AC) æquidistans ei, quæ ordinatim applicata est, extra sectionem cadet.

a 7. hujus. Nam si dicatur intra cadere, [a] ergo bisecabitur à diametro; quod
b 10. hujus. fieri nequit, [b] cùm producta extra sectionem cadat.

Prop.



1 *Apollonius.* pag.14

Prop. XVIII.

Si recta linea (A F B) sectioni occurrens (in F), productáque in utramque partem, extra sectionem cadat; sumatur autem aliquod punctum (C) intra sectionem, & per ipsam ei (A B), quæ sectioni occurrit, ducatur æquidistans (C D); ducta linea (C D), & producta, ex utraque parte sectioni occurret. Fig. 27.

Sumatur in sectione punctum quodvis E, & connectatur E F; hæc ipsi C D occurret; & siquidem inter puncta E F, manifestum est ipsam sectioni occurrere; sin extra, tum prius cum sectione conveniet. Simili discursu ad partes A F sectioni occurret.

Prop. XIX.

In omni sectione coni recta linea (B C) quæ à diametro (A B) ducitur, ordinatim applicatæ æquidistans, cum sectione conveniet. Fig. 28.

Sumatur aliquod punctum D in sectione, jungatúrque A D; hæc occurret ordinatim applicatæ ad A, ergo ad illam parallelæ A C; & siquidem inter puncta A D, tùm B C [a] protracta sectioni occurret, sin extra, priùs. [a] 10. *hujus*.

prop. X X.

Si in Parabola duæ rectæ lineæ C E, D F à sectione ad diametrum (A B) ordinatim applicentur, ut earum quadrata inter se, ita erunt lineæ (A E, A F) quæ ab ipsis ex diametro ad verticem abscinduntur. Fig. 29.

Sit A G latus rectum. itaque C Eq [a] = A E × A G. [a] & D Fq = A F × A G. ergo C Eq. D Fq [b] : : (A E × A G. A F × A G [c] : :) A E. A F. *Q. E. D* [a] 11. *hujus*. [b] 7.5. [c] 3.6.

Conversim. Si sit C Eq. D Fq : : A E. A F, erunt puncta C, D in parabola.

Coroll. D F ⊏ C E.

Hæc prima & præcipua est parabolæ proprietas, ex ejus definitione emergens.

Prop. XXI.

Si in hyperbola, vel ellipsi vel circuli circumferentia, rectæ lineæ (D E, F G) ordinatim ad diametrum (A B) applicentur, erunt quadrata Fig. 30.

drata earum ad spatia contenta lineis (E B, E A, & G B, G A) quæ inter ipsas, & vertices (A, B) transversi lateris figuræ interjiciuntur, ut figuræ rectum latus (A C) ad transversum (A B); inter se verò ut spatia, quæ interjectis, ut diximus, lineis continentur.

a 4. 6. b 1. 6. c 12. hujus. d 11. 5. Per E, & G ducantur E H, G K ad A C parallelæ, occurrentes productæ B C in H, & K. Estque C A. A B [a] : : (H E. E B [b] : :) H E × E A ([c] hoc est D Eq). E B × E A. Simili discursu C A. A B : : F Gq. G B × G A. Itaque D Eq. E B × E A [d] : : F Gq. G B × G A. & vicissim D Eq. F Gq : : E B × E A. G B × G A.

Coroll. In hyperb. F E ⊏ D E. (in ellipsi usque ad conjugatam ipsi A B diametrum; nam inde incipiunt ordinatim applicatæ decrescere.) *Sch.*

Conversim; si fuerit D Eq. E B × E A : : R T. vel D Eq. F Gq : : E B × E A. G B × G A. erunt puncta D, F in aliqua harum sectionum.

Hæc prima est & præcipua harum sectionum proprietas, ex ipsarum definitione resultans.

Coroll. D Eq. E B × B A : : Tq. Mq.

Viam jam sternit ad sectionum tangentes indagandas.

Prop. XXII.

Fig. 31. 32. Si Parabolen, vel hyperbolen recta linea (C D) in duobus punctis (C, D) secet, non conveniens cum sectionis diametro (A B) intra sectionem, producta cum eâdem diametro extra sectionem conveniet.

a cor. 20. & b cor. 21. hujus. Ordinatim applicentur C E, D B: sunt hæ inæquales, & [a] minor D B, [b] ergo juncta C D producta cum E A conveniet extra sectionem ad partes A. *Q. E. D.*

Prop. XXIII.

*id est, conjugatas. Si ellipsin secet recta linea (E F) inter duas *diametros (A B, C D) producta, producta cum utraque earum conveniet, extra sectionem.

Fig. 33. a 21. hujus. b 5. 2. c 14. 5. Ordinatim applicentur E G, F H. atque ob E Gq. F Hq [a] : : B G × G A. B H × H A, [b] & B G × G A ⊏ B H × H A (est enim punctum G propiùs centro M, quàm punctum H); [c] erit E Gq ⊏ F Hq. & E G ⊏ F H. ergo E F producta cum diametro B A conveniet, ad partes

partes A. Simili discursu eadem F E diametro D C occurret ad partes C.

Coroll. E G ⊏ F H.

Prop. XXIV.

Si parabolæ, vel hyperbolæ recta linea (C E) in uno puncto (D) occurrens, & producta ex utrâque parte, extra sectionem cadat, cum diametro (A B) conveniet. Fig. 34.

Sumpto quolibet in sectione puncto F, jungatur F D; [a] hæc diametro occurret; puta in A; hanc verò decussat ipsa C D (in D). ergo C D producta diametro occurret; inter A scilicet & sectionem. [a] 22. *hujus.*

Prop. XXV.

Si ellipsi recta linea (E F) occurrens (in G), inter duas diametros (A B, C D) & producta ex utrâque parte cadat extra sectionem, cum utrâque diametro conveniet. Fig. 35.

Ordinatim applicetur G K; hæc diametro A B est parallela: ergo E F cum A B conveniet. Simili discursu, F E cum C D conveniet.

Prop. XXVI.

Si in parabola, vel hyperbola ducatur recta linea (C D) sectionis diametro (A B) æquidistans, in uno tantùm puncto (E) cum sectione conveniet. Fig. 36.

Quod conveniet C D cum sectione, patet, (quoniam distantia parallelarum C D, A B est finita, sectio autem in infinitum potest augeri; adeóque ducta aliqua ab A B ordinatim applicata ad sectionem, excedet istam distantiam.) Conveniat in E; & ordinatim applicetur E F: ergo cùm omnes ordinatim applicatæ ad partes D [a] majores sint quàm E F, ad partes verò C minores, liquet C D nusquam convenire cum sectione, præterquam in E. [a] *cor.* 20. & *cor.* 21. *hujus.*

Prop. XXVII.

Si parabolæ diametrum (A B) secet recta linea (C D), producta in utramque partem cum sectione conveniet. Fig. 37.

Sit A E ordinatim applicatis parallela; si C D huic parallela sit, liquet

a 19. *hujus.* [a] liquet ipſam utrinque ſectioni occurrere; ſin minùs, producta con-
b 17. *hujus.* veniet cum A E, puta in E, [b] ergò priùs cum ſectione, puta in G; or-
c 11. 6. dinatim igitur applicetur G F; [c] fiátque A F. A D :: AD. AB. [d] un-
d 19. 5. de F D. D B :: A D. A B. ductâ igitur B C ad G F parallela erit,
e 4. & 22. 6. F Dq. D Bq. ([e] hoc eſt G Fq. B Cq) [f] :: A Dq. A Bq [g] :: A F.
f 22. 6. A B. ergo cùm ſit G Fq. B C q :: A F. A B, [h] erit punctum C in ſe-
g *conſt.* & *cor.* 20. 6. ctione: quare C D utrinque ſectioni ocurrit.
h *conv.* 20. *hujus.*

Prop. XXVIII

Fig. 38. Si recta linea (C D) unam (A) oppoſitarum ſectionum contingat, ſumatur autem punctum (E) intra alteram ſectionem (B), & per ipſum linea (E F) contingenti æquidiſtans ducatur, producta ad utramque partem cum ſectione (B) conveniet.

Nam quia C D diametro occurrit, eidem occurret E F, puta in G.
Sit A H = B G, & per H ducatur H K ad C D vel E F parallela,
a 4. 6. ſectioni occurrens in K, & ordinatim applicetur K L, ſumatúrque
b *conſtr.* G M = H L; denique ducatur M N ad K L parallela. Eſtque H L.
c 14. 5. L K :: [a] G M. M N. ergo (ob H L [b] = G M) [c] erit L K = M N.
d *conſtr.* & *Sch.* 48. 1. [d] Item B L × A L = A M × B M. quare B L × A L. L Kq [e] :: A M
e 7. 5. × B M. M Nq. [f] unde punctum N erit in ſectione B. Simili argumen-
f 21. *hujus.* to ex altera parte occurret ipſa E F ſectioni.

Prop. XXIX.

Fig. 39. Si in oppoſitis ſectionibus recta linea (C D) per centrum (C) ducta occurrat uni ſectioni (A), ulteriùs producta alteram quoque (B) ſecabit.

a 21. *hujus.* Ad diametrum A B ordinatim applicetur D F, fiátque B G = A F;
b *conſtr.* & *ſch.* 48. 1. & ordinatim ducatur G E, jungatúrque C E. éſtque B F × A F.
D Fq [a] :: T. R [a] :: A G × B G. G Eq. ergo cùm [b] ſit B F × A F = A G
c 14. 5. × B G. [c] erit D Fq = G Eq. & D F = G E. [d] Item C F = C G.
d *conſtr.* & ang. F [e] = ang. G. [f] ergo ang. F C D = G C E: [g] quare linea
e 29. 1. D C E eſt una recta, ſectioni B occurrens in E.
f 4. 1.
g *Sch.* 15. 1.

Coroll. 1. D F = E G.

2. C D = C E; (ob trigona C F D, C G E ſimilia, & latera C F, C G æqualia.)

Prop.

Prop. XXX.

Si in ellipsi vel oppositis sectionibus ducatur recta linea D E, ad utrasque partes centri (C) sectioni occurrens, ad centrum (C) bifariam secabit. Fig. 40.

In oppositis sectionibus patet * ex præcedenti. In ellipsi verò ad diametrum A B ordinatim applicentur D F, E G. Et quoniam B F × F A. A G × G B [a] :: (D Fq. G Eq [b] ::) F Cq. G Cq. & permutando B F × F A. F Cq :: A G × G B. G Cq. & componendo A Cq. (B F [c] × F A + C Fq). F Cq :: B Cq. [c] (A G × G B + G Cq) G Cq. sitque A C [d] = B C. [e] erit F C = G C; & propterea C D [f] = C E.

Coroll. C G = C F, & G E [f] = D F; & G B [g] = F A. & B F [g] = A G. & B F × F A [h] = A G × G B.

* *cor. 2. præc.*
a 21. *hujus.*
b 4. 6. & 22. 6.
c 5. 2.
d *constr.* & 10. *def. hujus.*
e 14. 5.
f 4. 6.
g 3. *ax.* 1.
h *Sch.* 48. 1.

Prop. XXXI.

Si in transverso figuræ latere (A B) hyperbolæ, sumatur aliquod punctum (C) non minorem (C B) abscindens ad verticem sectionis, quàm sit dimidia transversi lateris (A B) figuræ, & ab ipso (C) recta linea (C D) sectioni occurrat, si producatur, intra sectionem ad sequentes ipsius partes (E) cadet. Fig. 41.

Sit primò A C = C B. & ordinatim applicentur D H, * F E G. Et quia C Gq. C Bq [a] ⊏ C Hq. C Bq. erit per conversam rationem C Gq. C Gq — C Bq ⊐ C Hq. C Hq — C Bq. & inversè C Gq — C Bq. C Gq ⊏ C Hq — C Bq. C Hq. & permutatim, C Gq — C Bq. [b] (A G × G B.) C Hq — C Bq [b] (A H × H B) ⊏ (C Gq. C Hq [c] ::) G Eq. H Dq). ergo cùm A G × G B. A H × H B [d] :: G Fq. H Dq. erit G Fq. H Dq [e] ⊏ G Eq. H Dq. [f] ergo G F ⊏ G E. ergo C D E intra sectionem cadit.

* utcunque hæc ad partes E.
a 8. 5.
b 6. 2.
c 4. & 22. 6.
d 21 *hujus.*
e 13. 5.
f 10. 5.

Quòd si ab aliquo puncto in A C (posito C centro) ad punctum D ducatur recta, hæc ipsam C D decussabit in D, adeóque magis intra sectionem cadet.

Coroll. Hinc, linea hyperbolem contingens, diametrum secat inter verticem, & centrum sectionis: unde multò magis

Linea quæ duobus punctis secat (vel quæ tangenti parallela esse poterit) diametro occurret inter verticem & centrum.

Prop. XXXII.

Fig. 42. Si per coni sectionis verticem (A) ducatur recta linea (A C) ordinatim applicatis æquidistans, sectionem continget, & in locum (CAG), qui inter coni sectionem & rectam lineam (A C) interjicitur, altera recta linea non cadat.

Fig. 43. 44. Si fieri potest, cadat A D, & à puncto D (utcunque sumpto in A D) ordinatim applicetur D G E. Síntque A F, B A latera figurarum. Jam in parabola fiat A F. A H :: D Eq. A Eq. & ducatur H K ad E D
a 11. *hujus.* parallela, sectioni occurrens in L. Estque A F × A H [a] (L Hq). AHq
b 1. 6. [b] :: (A F. AH [c] :: D Eq. A Eq. [d] ::) K Hq. A Hq. [e] ergo L H = KH.
c *constr.* [f] *Q. E. A.*
d 4. & 22. 6.
e 9. 5. In reliquis sectionibus, præter hæc, connexa B F producatur; &
f 9. *ax.* 1. per E ducatur E M N ad A F parallela, fiátque A E × E N = D Eq; & juncta A N secet B M in X; ducantur X H ad A F, & H K ad A C
g 12. *hujus.* parallelæ. Estque X H × A H [g] (L Hq). A Hq [b] :: (X H. A H [h] ::
h 4. 6. N E. E A [b] :: N E × E A [g] (D Eq). E Aq [d] ::) K H q. A Hq. ergo L Hq [f] = K Hq. & L H = K H, pars toti æqualis. [f] *Q. E. A.*

Cor. Si duæ sectiones sese contingant, quæ harum unam contingit recta, alteram quoque continget.

Prop. XXXIII.

Fig. 45. Si in parabola, sumatur aliquod punctum (C), à quo recta linea (C D) ad diametrum (A B) ordinatim applicetur; & ei (E D) quæ ab ipsa ex diametro abscinditur ad verticem, æqualis (A E) ponatur in directum ab ejus extremitate (E): recta linea (A C), quæ à facto puncto (A) ducitur ad illud (C) quod sumptum fuerat, sectionem continget.

a *Not. infra.* Sumpto utcunque puncto F in A C, ordinatim applicetur F B,
b 4. *ax.* 1. sectioni occurrens in G. Et quoniam 2 A E × E B [a] ⊐ A Eq +
c 4. 6. E Bq; erit 4 A E × E B [b] ⊐ (A Eq + E Bq + 2 A E × EB [c] =)
d 13. 5. A Bq; [c] atqui 4 A E × E D. = A Dq. ergo 4 A E × E B. A Bq
e 1. 6. [d] ⊐ 4 A E × E D. A Dq. & permutando 4 A E × E B. 4 A E ×
f 20. *hujus.* E D ([e] hoc est, E B. E D, [f] vel G Bq. C D q) ⊐ A Bq. A Dq.
g 4. & 22. 6. ([g] vel F Bq. C Dq) [h] ergo G B. C D ⊐ F B. C D. [k] quare G B
h 22. 6.
k 10. 5. ⊏ C D. unde punctum F est extra sectionem; idémque de reliquis

rectæ

rectæ A C punctis simili discursu ostendetur. ergo recta A C F sectionem contingit. *Q. E. D.*

Not. 2 A E × E B $\sqsupset$ A Eq + E Bq. Nam A Eq + E Bq = [z] 2 A E × E B + Quad: A E — E B (hoc est + A Eq + E Bq — 2 A E × E B). *z cor. 7. 2.*

Prop. XXXIV.

Si in hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia sumatur aliquod punctum (C), ab eóque recta linea (C D) ad diametrum (A B) ordinatim applicetur, & quam proportionem habent lineæ (BD, AD), interjectæ inter ordinatim applicatam (C D) & (A, B) terminos transversi lateris (A B) figuræ; eandem habeant inter se (B E, E A) partes lateris transversi, ita ut quæ sunt ad verticem partes sibi ipsis respondeant (B D. D A : : B E. E A); recta linea (E C) conjungens punctum (E) quod in transverso latere sumitur, & punctum (C) quod est in sectione, sectionem ipsam continget. Fig. 46. 47.

Sumpto utcunque puncto F in E F ordinatim applicetur F G, sectioni occurrens in H. & per A, B puncta ducantur A L, B K ad E F parallelœ, & protrahantur D C K, B C X, G C M. Estque B K. A N [a] :: (B D. D A [b] :: B E. E A [a] :: B C. C X [a] ::) B K. N X. [c] ergo N X = A N. quare N X × A N [d] $\sqsubset$ A O × O X. [e] ideóque NX. O X [f] (hoc est K B. M B) [e] $\sqsubset$ A O. A N unde K B × A N $\sqsubset$ MB × A O. [g] ergo K B × A N. C Eq ([h] hoc est B D × D A. D Eq.) $\sqsubset$ B M × A O. C Eq [h] (hoc est B G × G A. G Eq.) & permutando B D × D A. B G × G A [k] (hoc est C Dq. H Gq) $\sqsubset$ D Eq. G Eq. [l] (C Dq. F Gq) [m] ergo C D. H G $\sqsubset$ C D. F G. [n] ergo H G $\sqsupset$ F G. quare punctum F extra sectionem existit. Quare E F sectionem contingit.

a 4. 6.
b hyp.
c 9. 5.
d 5. 2.
e Not. 2. infra.
f Not. 1.
g 8. 5.
h 3. Not.
k 21. hujus.
l 4, & 22. 6.
m 22. 6.
n 10. 5.

Notæ.

1. Quòd sit N X. O X :: K B. M B; sic patet: quoniam N O. K M [o] :: (O C. C M [o] ::) O X. M B, & permutatim N O. O X :: K M. M B. erit componendo N X. OX :: K B. M B. o 4. 6.

2. Quòd sit N X. O X $\sqsubset$ A O, A N, sic ostenditur. Sit R × S $\sqsubset$ X × Y. Dico R. X $\sqsubset$ Y. S. Sit enim R S = X Z. [p] ergo Z $\sqsubset$ Y. [q] ergo Z. S [r] (hoc est R. X) $\sqsubset$ Y. S. p sch. 48. 1. q 8. 5. r 17. 6.

3. Quòd sit K B × A N. C Eq :: B D × D A. D Eq, ita constabit: quoniam A N. C E [s] :: A D. D E. & C E. K B [s] :: D E. D B erit ex s 4. 6.

æquo

t 1. 6. ergo AN. KB : (ANq. AN × KB) :: AD. DB : (ADq. AD × u 4. & 22. 6. DB). u Item CEq. ANq :: DEq. ADq. ergo rursus ex æquo CEq. AN × KB :: DEq. AD × DB, ac inversè.

Coroll.

Hinc si $\frac{T \times AD}{T + 2AD}$ = AE in hyperbola, vel $\frac{T \times AD}{T - 2AD}$ in ellipse, erit EC tangens.

Prop. XXXV.

Fig. 48. Si parabolen recta linea (AC) contingat, conveniens cum diametro (AB) extra sectionem (in A), quæ (CB) a tactu ad diametrum ordinatim applicatur, abscindet ex diametro ad verticem sectionis lineam (BG) æqualem ei (GA), quæ inter ipsam & contingentem interjicitur; & inter locum, qui est inter contingentem, & sectionem, alia recta linea non cadet.

Si fieri potest, sint AG, GB inæquales; ipsique AG æqualis ponatur GE; & ordinatim applicetur EF. a ergo ducta AF sectionem a 33 hujus. contingetur, & rursus occurret ipsi AC. b *Q. E. A.*
b 14 22, 1.

Porro dicat aliquam DC sectionem inter & AC cadere; fiátque GE = GD. & ordinatim applicetur EF. a ergo ducta DF tanget sectionem, ipsamque DC iterum decussabit. b *Q. E. A.*

Prop. XXXVI.

Fig. 49. Si hyperbolen vel ellipsin, vel circuli circumferentiam contingat quædam recta linea (CD) conveniens cum transverso figuræ late- 50. re (BA), & a tactu recta linea (CE) ad diametrum (AB) ordinatim applicetur; erit ut linea (BD) quæ interjicitur inter contingentem, & terminum (B) transversi lateris ad (DA) interjectam inter eandem, & alterum lateris terminum (A), ita linea (BE), quæ est inter ordinatim applicatam (CE) & lateris terminum (B) ad eam (EA), quæ est inter eandem (CE) & alterum terminum (A), adeo ut continuatæ inter se sint, quæ sibi ipsis respondent (BD. DA :: BE. EA). Et in locum, qui inter contingentem, & sectionem coni interjicitur, altera recta linea non cadet.

a 34. hujus. Si enim non sit BD. BA :: BE. EA; sit BD. DA :: DG. GA. b 14 22, 1. & ordinatim applicetur GF; a ergo ducta DF sectionem continget, iterúmque conveniet cum recta b DC. *Q. E. A.*

Quin-

Quinetiam si aliqua H C intercedat, fiat B H. H A :: B G. G A. & applicetur G F ordinatim: [a] itaque juncta H F sectionem continget, [b] ipsamq; D G bis decussabit. *Q. E. A.*

Cor. Hinc si C D tangat, erit in hyperbola $A G = \frac{T \times AD}{T - 2 AD}$; in ellipse $A G = \frac{T \times AD}{T + 2 AD}$.

Not. In hyperbola A G ⊏ A D: quia T − 2 A D ⊐ T.
In ellipse A G ⊐ A D, quia T + 2 A D ⊏ T.

Prop. XXXVII.

Si hyperbolen vel ellipsim, vel circuli circumferentiam recta linea (C D) contingens cum diametro (A B) conveniat, & a tactu (C) ad diametrum linea (C E) ordinatim applicetur; quæ (E F) interjicitur inter applicatam (C E) & sectionis centrum (F), una cum interjecta (D F) inter contingentem (C D) & sectionis centrum (F); continebit rectangulum æquale quadrato lineæ F B, quæ est ex centro sectionis; sed unà cum ea (E D) quæ inter applicatam & contingentem interjicitur, continebit spatium, quod ad quadratum lineæ applicatæ (C E), eandem proportionem habet, quam transversum figuræ latus ad rectum. Fig. 51. 52.

Nam A E. E B [a] :: A D. D B ergo componendo A E + E B. E B — a 36. hujus.
:: A D + D B. D B quare (in hyperbola) bipartiendo antecedentes, F E. E B :: F B. D B. & per conversam rationem, F E. F B ::
F B. F D. [b] unde F E × F D = F Bq. *Q. E. D.* — b 17. 6.
Item, inversè F B [c] (A F) F E :: (F D. F B [d] ::) D B. (F B − F D). — c hyp.
E B (F E − F B) ergo componendo. A E. F E :: D E. E B. ergo — d 19. 5.
F E × D E [e] = A E × E B. quare F E × D E. C Eq [f] :: (A E × E B. — e 16. 6.
C Eq [g] ::) T R. *Q. E. D.* — f 7. 5.; g 21. hujus.
In Ellipsi verò & circulo, ob A E + E B. E B :: A D + D B. — h 17. 6.
D B erit quoque (bipartiendo antecedentes.) F B. E B :: F D. D B. — k 5. 2.
& per conversam rationem F B. F E :: F D. F B. unde F E × F D [h] = — l 5. 2.
F Bq. hoc est D E × F E + F Eq [k] = (F Bq = [l] A E × E B + F Eq — m 3. ax. 1.
[m]) ergo D E × F E = A E × E B. & D E × F E. C Eq [n] :: (A E × E B. — n 7. 5.
C Eq [o] ::) T. R. — o 21. hujus.

Coroll. F E, F B, F D sunt ∺.

{ F E. E B :: F B. D B.
{ F B. B E :: F D. D B.
{ F B. F D :: B E. D B.

Hinc

☞ Hinc methodus ex dato puncto in diametro, vel sectione contingentem ducendi.

Conversim: si F E × F D = F Bq: vel si D E × F E. C Eq :: T, R. erit recta C D tangens sectionis.

Prop. XXXVIII.

Fig. 53. Si hyperbolen, vel ellipsin, vel circuli circumferentiam recta linea
54. (F L) contingens in (E), cum secundâ diametro (C D) conveniat, &
55. à tactu (E) ad diametrum (C D) applicetur linea (E H) æquidistans
56. alteri diametro (A B); quæ (H G) interjicitur inter applicatam (EH) & sectionis centrum (G) unà cum interjecta (F G) inter contingentem, & sectionis centrum, continebit rectangulum, æquale quadrato quod fit ex (G C) dimidia secundæ diametri: sed unà cum ea (H F) quæ inter applicatam & contingentem interjicitur, spatium continebit, quod ad quadratum applicatæ (E H) eam proportionem habet, quam figuræ rectum latus ad transversum.

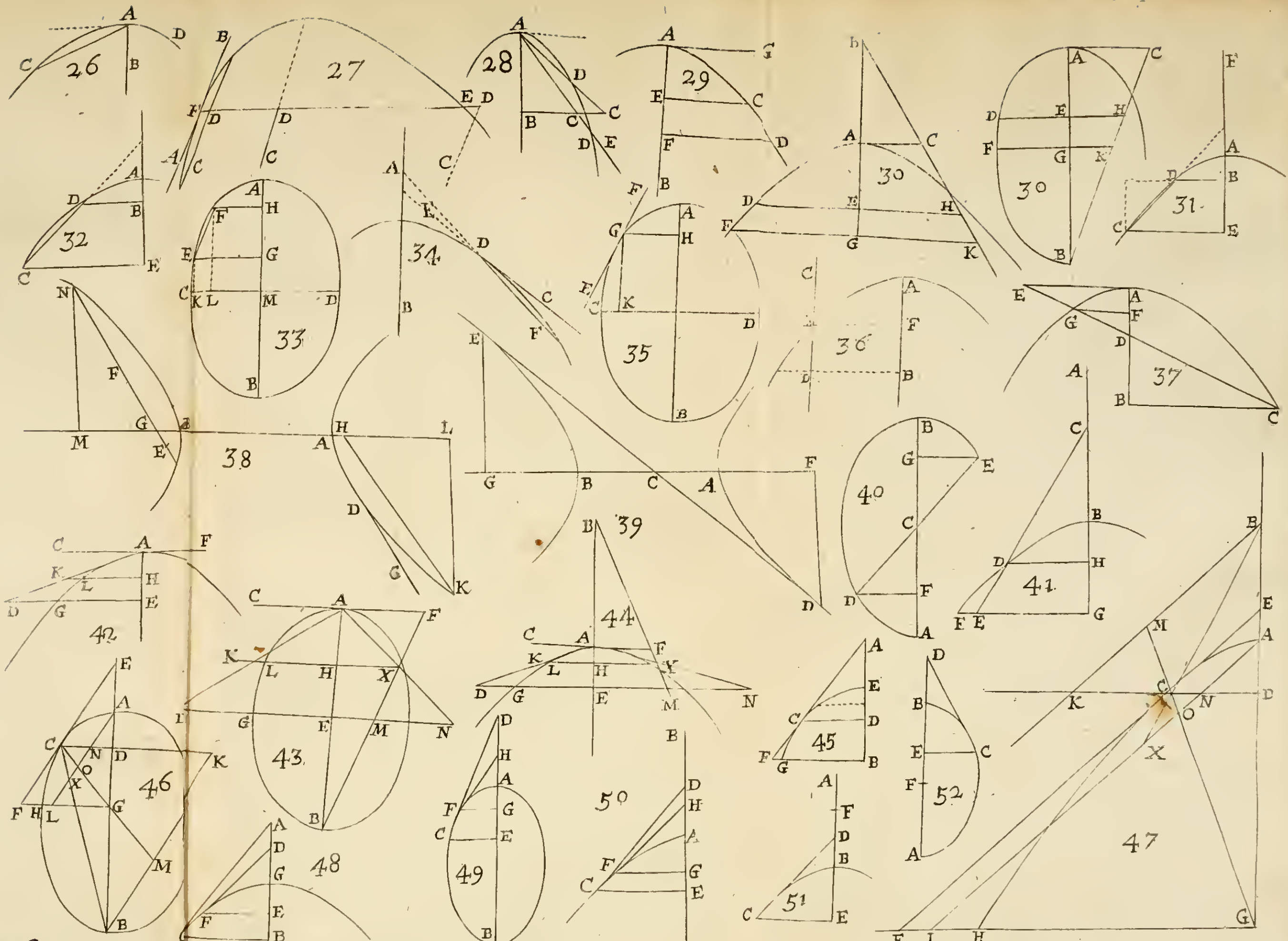
a 23. 6. Ordinatim applicetur E M. Estque G M × G L. H G × F G [a] =
b 34.1 & 4.6. G M. H G + G L. F G [b] = G M. E M + L M. E M [a] = G M ×
c 21. hujus. L M. E Mq [c] = T. R [d] :: Tq. Mq ([e] A Bq. C Dq [d] ::) A Gq. C Gq.
d cor. def. ad 16. hujus. ergo cùm A Gq [e] = G M × G L [f]. erit C Gq = H G × F G. *Q.E.D.*
e hyp. Porro, inversè R. T = (H G. G M + F G. G L [b] = H G. H E +
d 15. 5. F H. H E [a] =) H G × F H. H Eq.
e 37. hujus. Iisdem positis ostendendum est. Ut linea (C F), quæ inter tangen-
f 14. 5. tem, & terminum secundæ diametri ad partes applicatæ interjicitur, ad eam (F D), quæ inter tangentem, & alterum terminum secundæ diametri, ita esse lineam (D H), quæ est inter alterum terminum, & applicatam, ad eam (C H) quæ inter alterum terminum & applicatam.

g priùs. Nam ob F G × H G [g] = (C Gq [h] =) C G × G D, [k] erit F G.
h hyp. & sch. 48. 2. G D :: C G. G H. & per conversam rationem G F. F D :: G C. C H.
k 14. 6. & duplicando antecedentes, C F + F D. F D :: D C. C H. & dividendo C F. F D :: D H. C H. *Q. E. D.*

Coroll. 1. Si F G × G H = G Cq. vel F H × H G. H E :: R. T. erit E F tangens.

2. F G × G H = $\frac{1}{4}$ T R.

Prop.



2

Apollonius. pag. 24

Prop. XXXIX.

Si hperbolen, vel ellipsin, vel circuli circumferentiam contingens recta linea (C D) cum diametro (A B) conveniat (in D); & à tactu (C) ad diametrum (A B) ordinatim applicetur linea (C E); sumptâ quâvis lineâ ex duabus, quarum altera (E F) interjicitur inter applicatam (C E), & sectionis centrum (F); altera (E D) inter applicatam, & contingentem (C D); habebit ad eam applicata (C E) proportionem compositam ex proportione, quam habet altera dictarum linearum (E F, E D) ad applicatam (C E), & ex proportione, quam rectum figuræ latus habet ad transversum. Fig. 57. 58.

Sit E F. C E :: G. E D. [a] vel E F × E D = C E × G. ergo C Eq. a 16. 6.
C E × G [b] (C E. G) [c] :: (C Eq. E F × E D :: [d]) R. T. atqui C E. b 1. 6.
E D [e] = C E. G + G. E D ([f] + E F. C E.) ergo C E. E D = c 7. 5. d 37. *hujus.*
R. T. + E F. C E. *Q. E. D.* e 5. *def.* 6. f *constr.*

Prop. XL.

Si hyperbolen, vel ellipsin, vel circuli circumferentiam recta linea (A H) contingens (in A) conveniat cum secunda diametro (D E); & à tactu (A) ad eandem diametrum (D E) applicetur linea (A G) æquidistans alteri diametro (B C); sumptâ quâlibet lineâ ex duabus; quarum una (G F) inter applicatam (A G) & sectionis centrum (F) interjicitur, altera (G H) inter applicatam, & contingentem: habebit ad ipsam applicata (A G) proportionem compositam ex proportione, quam habet transversum figuræ latus ad rectum, & ex ea quam altera dictarum linearum (G F, G H) habet ad applicatam (A G). Fig. 59. 60.

Sit G H. A G :: K. G F. [a] vel G H × G F = A G × K. ergo AGq. a 16. 6.
G H × G F [b] (T. R.) [c] :: (A Gq. A G × K [d] ::) A G. K. atqui A G. b 38. *hujus.*
G F [e] = A G. K + K. G F [f] (+ G H. A G). ergo A G. G F = c 7. 5. d 1. 6.
T. R. + G H. A G. *Q. E. D.* e 5. *def.* 6. f *constr.*

Prop. XLI.

Si in hyperbola, vel Ellipsi, vel circuli circumferentia ordinatim applicetur recta linea (CD) ad diametrum (AB); & ab applicata (C D), & ea (E A) quæ ex centro, describantur parallelogramma æquian- Fig. 61. 62.

augula (D G, A F); habeat autem applicata (C D) ad reliquum latus (C G) parallelogrammi (D G) proportionem compositam ex proportione, quam habet ea quæ ex centro (E A) ad reliquum latus (E F), & ex proportione, quam rectum figuræ sectionis latus (R) habet ad transversum (T); parallelogrammum factum à lineâ (E D) quæ inter centrum (E) & applicatam (C D) interjicitur, simile parallelogrammo (A F), quod fit ab ea (E A) quæ ex centro, in hyperbola quidem majus est, quàm parallelogrammum (D G) ab applicata (D C), parallelogrammo (A F) ab ea (E A) quæ ex centro; In ellipsi verò, & circuli circumferentia, unà cum parallelogrammo (D G) quod fit ab applicata, æquale est parallelogrammo (A F) ab ea, quæ ex centro.

a 21. *hujus.* Fiat R. T [a] (hoc est D Cq. B D × D A) :: D C . C H [b] (hoc est
b 1. 6. D Cq. D C × C H). [c] ergo B D × D A = D C × C H. item D C.
c 9. 5. C H + A E. E F [d] = (R. T + A E. E F [e] = D C. C G [f] =) D C.
d *constr.* C H + C H. C G. quare A E. E F [b] (hoc est A Eq. A E × E F) ::
e *hyp.* (C H . C G [g] :: C H × D C . C G × D C [h] ::) B D × D A . C G ×
f 5. *def.* 6. D C. permutandóq; B D × D A. A Eq :: (C G × D C. A E × E F [k] ::)
g 1. 6. *pgr.* D G. F A. ergo in hyperbola componendo *pgr.* D G + F A.
h *priùs* & 7. 5. *pgr.* F A :: D Eq. [l] (B D × D A + A Eq). A Eq.
k 22. 6.
l 6. 2. In Ellipsi verò & circulo, permutando A Eq *pgr.* F A :: (B D ×
m 19. 5. D A. *pgr.* D G [m] ::) D Eq [n] (A Eq — B D × D A). *pgr.* F A —
n 5. 2. D G & permutando D Eq. A Eq :: *pgr.* F A — D G. *pgr.* F A.
o 22. 6. quare si fiat ex D E parallelogrammum simile ipsi A F [o]; liquet propositum.

Coroll. Quæ de parallelogrammis ostensa sunt, eadem valent in trigonis horum dimidiis.

Prop. XLII.

Fig. 63. Si parabolen contingens recta linea (C A) cum diametro (A B) conveniat in A; & à tactu (C) ad diametrum (A B) ordinatim applicetur linea (C H); sumpto autem quovis puncto (D) in sectione, applicentur ad diametrum duæ lineæ (D E, D F), altera quidem (D E) æquidistans contingenti (C A); altera verò (D F) æquidistans ei (C H), quæ à tactu (C) ordinatim est appplicata; triangulum (E D F) quod ab ipsis constituitur, æquale erit parallelogrammo (F G) contento linea (C H) à tactu applicata, & ea (F B), quæ interjicitur inter æquidistantem (D F) & sectionis verticem (B.)

a 35. *hujus.*
b *ex.* 41. 1. Nam ob A H [a] = 2 H B, [b] erit triang. C H A = *pgr.* H G. quare

pgr.

pgr. H G. triang. D F E [c] ::(triang. C H A. D F E [d] :: C Hq. D F q [e] :: H B. F B [f] ::) *pgr*. H G. *pgr*. F G. [g] ergo triang, D F E = *pgr*. F G. *Q. E. D.* c 7. 5. d 22. 6. e 20. *hujus.* f 1.6. g 9.5.

Prop. XLIII.

Si hperbolen, vel ellipsin, vel circuli circumferentiam contingens recta linea (E D) conveniat cum diametro (A B); & à tactu (E) ad diametrum (A B) ordinatim applicetur linea (E F); huic verò per sectionis verticem (B) ducatur æquidistans (B L), quæ cum linea (E C) per tactum (E) & centrum (C) conveniat in (L); & sumpto in sectione aliquo puncto (G), ab eo ad diametrum ducantur duæ lineæ (G H, G K) una quidem (G H) æquidistans contingenti (E D), altera verò (G K) æquidistans ei (E F), quæ à tactu applicata est: triangulum (G K H) ab ipsis factum in hyperbola minus erit, quàm triangulum (C K M) quod abscindit linea (C E) per centrum & tactum ducta, triangulo (C B L) ab ea (C B) quæ ex centro simili abscisso: in ellipsi verò, & circuli circumferentia una cum triangulo (C K M) abscisso ad centrum æquale erit triangulo (C B L), simili abscisso, quod describitur ab ea (C B) quæ ex centro. Fig. 64. 65. 66.

Nam G K KH [a] = (EF. F D [b] = C F. F E + R. T [c] =) C B. B L + R. T. unde triang. G H K, æquatur excessui triangulorum C K M, B C L. *Q. E. D.* a 4. 6. b 39. *hujus.* c 4. 6. d *cor.* 41. *hujus.*

Coroll. Triang. G K H = 4 laterum K B L M.

Schol.

Triang. C B L = triang. C D E. *Vid. Eut.*

Prop. XLIV.

Si unam oppositarum sectionum contingens recta linea (F G) contingens cum diametro (A B) conveniat (in G); à tactu verò (F) ad diametrum ordinatim applicetur linea (F O); atque huic per alterius sectionis verticem (B) ducatur æquidistans (B L), ut conveniat cum linea (F C) per tactum (F) & centrum (C) ductâ; sumpto autem quovis in sectione puncto (N), applicentur ad diametrum duæ lineæ (N K, N H), quarum altera (N K) æquidistet contingenti (F G), altera æquidistet ei (F O) quæ à tactu ordinatim applicata est; triangulum (N H K), ab ipsis factum, minus est, quàm triangulum (C M H) quod abscindit applicata ad centrum sectionis, triangulo simili (C B L), abscisso ab ea (C B) quæ ex centro. Fig. 67.

a 31. *hujus.* b *hyp.* c *cor. 29. hujus.* d 15. 1. e 4. 1. f 27. 1. g 30. 1. h 43. *hujus.*

Productâ F C, ut occurrat sectioni B in E, per E ducatur tangens E D, & ordinatim applicetur E X. Estque O C × C G [a] = (A C q [b] = B Cq [a] =) X C × C D. ergo cùm sit O C [c] = X C, erit C G = C D. item F C [c] = E G. & verticales anguli ad C [d] pares sunt: [e] ergo ang. C G F = ang. C D E. [f] unde D E ad F G, & [g] proinde ad N K parallela est. [h] ergo triang. C M H—C B L = triang. N H K.

Coroll. C D = C G.

Coroll. Tangens E D tangenti F G æqualis & parallela est: & conversim; si E D tangenti F D æqualis vel parallela sit, etiam E D tanget oppositam sectionem.

Prop. XLV.

Fig. 68. 69. 70. 71.

Si hyperbolen, vel ellipsin, vel circuli circumferentiam contingens recta linea (C M L) cum secunda diametro (H D) conveniat (in L); & à tactu (C) ad eandem diametrum applicetur linea (C D), æquidistans alteri diametro (A H); & per tactum (C) & centrum (H) ducta linea (C H) producatur; sumpto autem in sectione quovis puncto (B), ad secundam diametrum (H D) ducantur duæ lineæ (B E, B F), quarum una (B E) contingenti (C L), altera (B F) applicatæ (C D) æquidistet; triangulum (B F E) quod ab ipsis constituitur, in hyperbola quidem majus est, quàm triangulum (G F H) abscissum ab applicata ad centrum, triangulo (L C H), cujus basis est linea contingens (C L), & vertex sectionis centrum (H): in ellipsi verò & circuli circumferentia, unà cum triangulo abscisso (G F H) æquale est triangulo (L C H), cujus basis est linea contingens (C L) & vertex sectionis centrum (H).

a 39. *hujus.* b 4. 6. c *cor. 41. hujus.* d 34. 1. & 1. *ax.* e 3. *ax.* f 7. 1. g 4. 1. h *priùs.* l 4. 6. m 2. *ax.* 1.

Ducantur C K, B N ad D H parallelæ. & trigonum ad A H, (simile trigono (C D L) appelletur P. estque C K. K H [a] = (M K. K C + R. T [b] =) C D. D L. + R. T. quare in hyperb. triang. C D L (C D H + C L H) [c] = (triang. C K H + P [d] =) triang. C D H + P. [e] unde P = triang. C L H. Cæterum ob B N. F G [f] = (F H. F G. [g] = D H. D C [f] = C K. K H [h] = C D. D L + R. T [l] =) B F. (N H) F E + R. T. [c] Erit triang. B F E = triang. G H F + P, [m] ergo triang. B F E = triang. G H F + triang. C L H.

Simili discursu, in ellipsi erit triang. B F E + G H F = triang. C L H.

Prop. XLVI.

Si parabolen contingens recta linea (C A) cum diametro (A B) conveniat (in A); quæ per tactum (C) duciur diametro æquidistans (H C M), ad easdem partes sectioni lineas (L F) in sectione ductas, quæ æquidistant contingenti (C A), bifariam secabit (in N.) Fig. 72.

Ordinatim applicentur B H, F G K, L M D. Estque triang. E L D [a] = *pgr*. B M. & triang. E F G [a] = *pgr*. B K. [b] ergo 4 lat. F L D G = *pgr*. G M. auferatur commune N M D G F; [b] manéntque trigona N M L, F K N æqualia. [c] eadémque similia sunt. ergo homologa latera N L, N F æquantur. *Q. E. D.* a 42. *hujus*. b 3. *ax*. 1. c 29.1.& 4.6.

Coroll. 1.

In parabola omnes lineæ parallelæ diametro sunt * etiam diametri: & vicissim, omnes diametri sunt parallelæ. * *def*. 10. *hujus*.

Coroll. 2.

Omnes contingenti æquidistantes sunt ordinatim applicatæ ad diametrum per tactum ductam.

Prop. XLVII.

Si hyperbolen, vel ellipsin, vel circuli circumferentiam contingens recta linea (E D) cum diametro (A B) conveniat (in D); per tactum (E) & centrum (C) ducta linea (E C) ad easdem partes sectioni, quæ in sectione ducuntur contingenti (E D) æquidistantes (G N) bifariam secabit (in O.) Fig. 73. 74.

Ordinatim applicentur N F X, B L, G M K. Estque triang. HNF [a] = 4 lat. L B F X. & triang. G H K [a] = quadrilat. L B K M. [b] ergo 4 lat. N G K F = M K F X. commune auferatur O N F K M, [b] manent trigona O M G, O X N æqualia. [c] eadem vero similia sunt. ergo N O = G O. *Q. E. D.* a *cor*. 43. *hujus*. b 3. *ax*. 1. c 29.1. & 4.6.

Coroll. C E est diameter sectionis cujuslibet ex his.

Prop. XLVIII.

Si unam oppositarum sectionum contingens recta linea (L K) cum diametro (A B) conveniat (in K); & per tactum (L), & centrum (C) linea (L C) producta alteram sectionem secet (in E); quæ in altera Fig. 75.

sectione

sectione ducta fuerit contingenti (L X) æquidistans (G N) à lineâ (L C) productâ bisecabitur (in O.)

a cor. 44. hujus. b 30. 1. c 47. hujus.

Ducatur tangens E D; [a] estque E D ad L K parallela; [b] ac ideò ad N G. [c] ergo O N = O G. *Q. E. D.*

Lemma.

Fig. 76. 77.

Sit triangulum N L K æquale parallelogrammo L C, & ang. K L N = D L P: erit K L × L N = 2 D C × L D.

a 6. ax. 1. b 14. 6. c 16. 6.

Compleatur enim *pgr.* L R. & productâ L P, fiat P T = L P. & compleatur *pgr.* D T. eritque *pgr.* L R [a] = *pgr.* D T. [b] unde K L. L D :: L T (2 D C). L N. [c] quare K L × L N = 2 D C × L D.

Item, si D P fuerit trapezium trigono K L N æquale, erit K L × L N = L D ×: C D + L P. Nam fiat P T = D C; & compleatur *pgr.* D T. eritque *pgr.* D T = (2 D P = 2 triang. K L N =) *pgr.* L R. unde K L . L T . (L P + D C) :: L D . L N. quare K L × L N = L D ×: D C + L P. *Q. E. D.*

Schol. Hinc K Nq. K Lq :: R. G (hoc est ut parameter axis ad parametrum diametri D N).

Fig. 78. a 4. & 22. 6. b 11. hujus. c prius in 49. d 7. 5. (h. e 1. 6. Est. 2. 7mi Apollonii.

Nam K Nq. K Lq [a] :: X Dq. D C q: & est X Dq [b] = R × B X. [c] & D Cq = G × B X. [d] ergo K Nq. K Lq :: (R × B X. G × B X [e] ::) R. G.

Schol.

Not. Si R sit parameter axis B X; erit G = R + 4 B X.

Nam sit B K ad D C parallela. ergo C B = D L = B X. | B T = 2 D L.

$$G \times \left| \begin{matrix} DL = BLq = \\ BX. \end{matrix} \right| \begin{matrix} DXq + BTq = R \times BX + 4BXq. \\ LTq. \end{matrix}$$

ergo G = R + 4 B X.

Prop. XLIX.

Fig. 79.

Si parabolen contingens recta linea (D C) cum diametro (B C) conveniat in (C); & per tactum (D) ducatur linea (F N) æquidistans diametro (C B); à vertice verò (B) ducatur æquidistans (B F) ei (D X), quæ ordinatim applicata est; & fiat ut contingentis portio (E D) inter applicatam (B F) & tactum (D) interjecta ad æquidistantis portionem (D F), quæ itidem inter tactum (D) & applicatam (B F) interjicitur, ita quædam recta linea (G) ad duplam contingentis (D C;) quæ

quæ (KL) à sectione ducta fuerit contingenti (DC) æquidistans, ad lineam (FN), quæ per tactum ducitur diametro æquidistans, poterit rectangulum contentum inventâ lineâ (G), & eâ (LD), quæ inter ipsam (KL), & tactum (D) interjicitur. DE. | DF :: G. | 2 DE BX.

Ordinatim applicentur DX & KNM. Estque CB [a] = (BX [b] = FD); [c] unde triang EBC = EFD. additóque communi DEBMN, erit DCMN [d] = (*pgr.* FM [e] =) triang. KPM. ablatóque communi LPMN, erit *pgr.* LC [f] = triang. NLK. [g] unde KL × LN = 2 DC × LD.

Itaq; G × LD. KL × LN [h] :: (G × LD. 2 DC × LD [k] :: G. 2 DC [l] :: ED. DF [m] :: KL. LN [n] ::) KLq. KL × LN. [o] ergo G × LD = KLq.

Cor. Hinc DL est diameter, & G rectum latus sectionis, cujus vertex D. $\frac{4DEq}{BX} = \frac{2DE \times DC}{BX}$ est rectum latus sectionis, cujus vertex B.

a 35. *hujus.*
b 34. 1.
c *ex.* 20. 6.
d 2. *ax.*
e 42. *hujus.*
f 3. *ax.*
g *lemma præc.*
h 7. 5.
k 1. 6.
l *hyp.*
m 4. 6.
n 1. 6.
o 9. 5.

Prop. L.

Si hyperbolen, vel ellipsin, vel circuli circumferentiam contingens recta linea (ED) cum diametro (AB) conveniat, pérque tactum (E) & centrum (C) linea (EC) producatur; à vertice autem (B) ordinatim applicata (BG) conveniat cum ea (EC), quæ ducitur per tactum, & centrum; fiatque ut contingentis portio (EF) inter tactum (E) & applicatam BG ad portionem (EG) lineæ (EC) ductæ per tactum & centrum; quæ itidem inter tactum (E) & applicatam (BG) interjicitur, ita quædam recta linea (EH) ad duplam contingentis (ED); quæ (LM) à sectione ducitur contingenti (ED) æquidistans ad lineam (EC) per tactum, & centrum ductam, poterit spatium rectangulum, quod adjacet inventæ lineæ (BH), latitudinem habens interjectam (EM) inter ipsam (LM) & tactum (E); in hyperbola quidem excedens figurâ simili contentæ lineâ (EK) dupla ejus (CE), quæ est inter centrum & tactum, & inventâ lineâ (EH), in ellipsi verò, & circulo deficiens eâdem. Fig. 80. 81. EF. EG :: EH. 2 ED.

Ducatur LRN ad BG, & CSO ad KP parallelæ. Et ob EK [a] = 2 EC, [b] erit EH = 2 ES. ergo 2 ES. 2 ED [c] :: (EH. 2 ED [d] :: FE. EG [b] ::) LM. MR. porro ob triang. RNC [e] = CDE [f] (CGB) + LNX (in hyperbola), [e] vel triang. RNC + LNX = CDE (in ellipsi & circulo) erit trapezium MEDX [g] = triang. LMR.

a *hyp.*
b 4. 6.
c 7. 5.
d *hyp.*
e 43. *hujus.*
f *sch.* 43. *hujus.*
g 3. *ax.* 1.

h *lem. ante* 49. L M R. [h] ergo L M × M R = E M × : E D + M X. Denique quia
k 4. 6. M O. E S [k] :: (M C. C E [k] ::) M X. E D. componendóque M O +
l 1. 6. E S. E S :: M X + E D. E D. erit permutando M O + E S. M X +
m *priùs et* 7. 1. E D ([l] hoc est E M × : M O + E S. E M × : M X + E D [m] vel E M
n 15. 5. × : M O + E S. L M × M R) :: E S. E D [n] :: 2 E S. 2 E D [o] :: L M.
o *priùs.* M R. [l] :: L Mq. L M × M R. [p] ergo E M × : M O + E S = L Mq.
p 9. 5. atqui E S q = (S H [r] =) O P. ergo E M × M P = L M q. *Q. E. D.*
q *priùs.*
r 34. 1.

Cor. E K est diameter, & E H latus rectum sectionis, cujus vertex E.

Prop. L I.

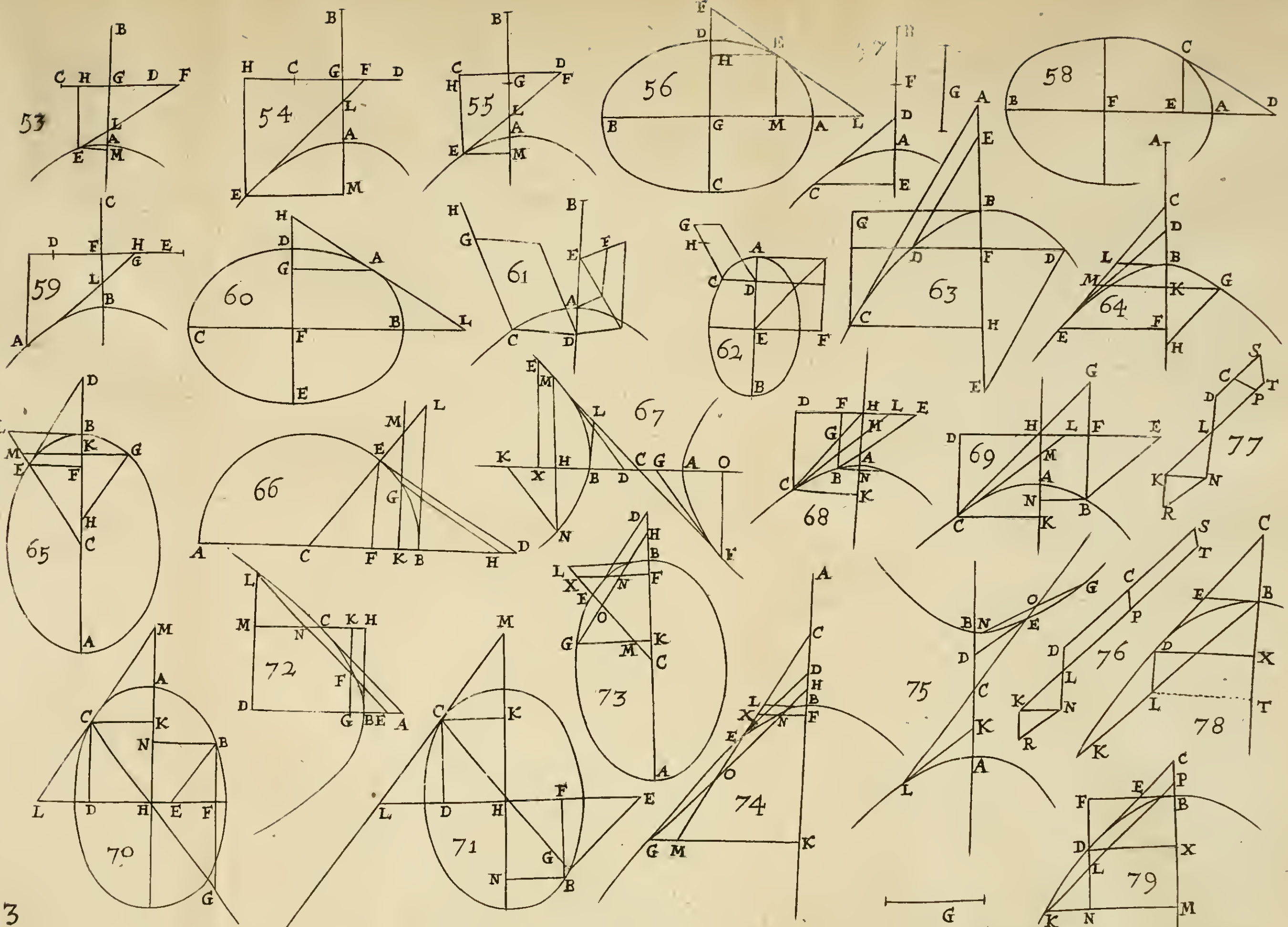
Fig. 82. Si quamlibet oppositarum sectionum contingens recta linea (C D) cum diametro (A B) conveniat; pérque tactum (C) & centrum (E) linea (C E) producatur usque ad alteram sectionem; à vertice verò (B) ducatur linea (B G) æquidistans ei, quæ ordinatim applicata est, conveniénsque cum linea (C E) per tactum & centrum ducta; & fiat ut contingentis portio (L C) inter applicatam & tactum ad portionem (C G) lineæ ductæ per tactum & centrum, quæ inter tactum & applicatam interjicitur, ita quædam recta linea (K) ad duplam contingentis (C D), quæ in altera sectione ducitur, æquidistans contingenti (F M) ad lineam (F E) per tactum, & centrum ductam, poterit rectangulum, quod adjacet inventæ lineæ (K) latitudinem habens lineam, quæ est inter ipsam, & tactum (F), excedénsq; figurâ simili ei, quæ lineâ (CF) inter oppositas sectiones interjectâ, & inventâ (K) continetur.

a *cor.* 44. *hujus.* Ordinatim applicetur A X N. [a] Súntque F M, C D æquales & pa-
b *constr.* rallelæ: [b] itémque A N, B G parallelæ sunt. ergo F X. F N [c] :: (LC.
c 4. 6. C G :: [d] K. 2 C D [e] ::) K. 2 F M; unde quæcunque à sectione A F ad
d *hypoth.* productam E F contingenti F M ducuntur parallelæ, [f] poterunt re-
e 7. 5. ctangulum contentum ipsâ K, & interjecta inter istas; & punctum
f 50. *hujus.* F, excedéntque figurâ simili ei, quæ rectâ C F, & ipsâ K continetur.

Coroll.

a 46. *hujus.* Itaque his demonstratis, liquet in [a] parabola unamquamque recta-
b 47. rum linearum, quæ diametro ex generatione ducuntur æquidistantes,
c 48. diametrum esse; In [b] hyperbola verò & ellipsi & [c] oppositis sectionibus, unamquamque earum, quæ per centrum ducuntur.

d 49. Et in [d] parabola quidem applicatas ad unamquamque diametrum,
e 50. æquidistantes contingentibus posse rectangula ipsi adjacentia: in [e] Hyperbola,


53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79

3

perbola, & [f] oppositis rectangula adjacentia ipsi, quæ excedunt eâdem f 51. *hujus.*
figurâ, in ellipsi autem, quæ eâdem deficiunt. Postremò quæcunque
circa sectiones, adhibitis principalibus diametris demonstrata sunt, &
aliis diametris assumptis eadem contingere.

Prop. LII. Probl. I.

Datâ in plano rectâ lineâ (A B) ad unum punctum (A) terminatâ, Fig. 83.
invenire in plano coni sectionem, quæ Parabole appellatur, ita ut ejus
diameter sit data linea (A B), vertex lineæ terminus (A); quæ verò
à sectione ad diametrum (A B) in dato angulo applicatur, possit re-
ctangulum contentum lineâ, quæ est inter ipsam & sectionis verticem
(A), & alterâ quâdam datâ lineâ (Z).

Datus angulus primò rectus sit. Producatur A B ad E, ita ut A E 1. *Cas.*
$\sqsubset \frac{1}{4}$ Z. Sitque Z. Y [a] :: Y. A E. unde Z. A E [b] :: Yq. A Eq. ergo a 13. 6.
cum Z [c] $\sqsupset$ 4 A E, [d] erit Yq $\sqsupset$ 4 A Eq, & proinde Y * $\sqsupset$ 2 A E. b *cor.* 20. 6.
[e] ergo ex Y, & duabus AE constitui poterit triangulum. Fiat ergo EAF, c *constr.*
rectum subjecto plano, ita ut AF = AE, & E F = Y; ducantúrque d 14. 5.
A K ad E F, & F K ad E A parallelæ ([f] unde A K [f] = E F = [g] = Y; * 4. 2.
& F K [f] = E A [g] = F A). Tum concipiatur conus, cui vertex F, e 22. 1.
basis circulus super diametrum A K, rectus plano A F K; erit is co- f 34. 1.
nus rectus (ob F K = F A). Secetur conus plano ad circulum A K g *constr.*
parallelo, [h] facientíque proinde sectionem M X N circulum, plano h 4. *hujus.*
M F N (vel F A K) rectum; horúmque communis sectio sit recta
M N, [h] diameter nempe circuli M X N; communis autem sectio sub-
jecti plani, & circuli sit recta X L. Quum igitur tam circulus M X N,
quàm subjectum planum recta sint triangulo M F N, [k] erit istorum k 19. 11.
communis sectio X L recta trigono M F N, [l] ideóque rectis (quæ in l 3. *def.* 11.
eo) M N, A B perpendicularis. Ex quibus constat planum per A B,
X L ductum facere in cono sectionem, quæ parabole dicitur (juxta
conditiones in 11ª hujus præscriptas) cujus diameter A B, lineæque
ad hanc à sectione ordinatim ductæ ad rectos angulos applicentur, ut- m *prius.*
pote ad X L parallelæ. Porro ob Z, Y; A E [m] (hoc est Z, A K, A F) n *constr.*
[n] $\div\!\!\div$, [o] erit Z. A F :: A Kq. A F q (A F × F K). [p] unde Z est rectum o *cor.* 20. 6.
latus. Ergo factum. p 11. *hujus.*

Sed datus angulus non sit rectus, sitque ei æqualis H A E; & fiat 2. *Cas.*
A H = $\frac{1}{2}$ Z; & per H ducatur H E ad A E perpendicularis, & per Fig. 84.
E ad H B parallela E L, & per A ad E L perpendicularis A L: tum
bisectâ E L in K, per K ducatur ipsi E L perpendicularis M K F G;

a 11.6. sitque A Lq [a] = L K × K M. Datis igitur rectâ K L positione, & rectâ K M magnitudine, & recto angulo, describatur (ut modò ostensum) parabole, cujus diameter K L, vertex K, & rectum latus K M. Transibit hæc per A ([b] ob A Lq = K L × K M) & A E [c] continget ipsam, (ob L K = K E) & H A est diameter [d] (quia ad E L parallela), [e] & quæ ad A E parallelæ, bisecantur ab A B, [f] inque angulo H A E applicantur: & ob trigona A G F, A E H [g] similia (quia anguli A E H, A G F recti, & H A E communis), est F A. A G [g] :: (H A. A E [h] ::) 2 H A. 2 A E, [k] hoc est F A. A G :: Z. 2 A E. [l] unde Z rectum erit latus sectionis. Quæ *E. F.*

b 11. *hujus.* c 33. *hujus.* d *cor.* 46. *huj.* e 45. *hujus.* f *constr.* g 4. 6. h 15. 5. k *constr.* l 49. *hujus.*

Prop. LIII. Probl. 2.

Fig. 85. Datis duabus rectis lineis (A B, B C) terminatis, quæ ad rectos inter se angulos constituantur; & alterâ (A B) productâ ad * easdem partes angulo recto, invenire coni sectionem, quæ hyperbole dicitur; in eodem plano, in quo sunt datæ lineæ (A B, B C), ita ut producta (A B) sit diameter sectionis, & vertex punctum (B), quod ad angulum (A B C) consistit; quæ verò à sectione ad diametrum ordinatim applicatur, angulum faciens, æqualem dato, possit rectangulum, quod adjacet alteri lineæ (B C), latitudinem habens lineam interjectam inter applicatam, & sectionis verticem (B), excedénsque figurâ simili, & similiter positâ ei, quæ datis â principio lineis (A B, B C) continetur.

* *hoc est versùs D.*

1. *Cas.* Sit datus angulus primò rectus; & super lineam A B planum attollatur, rectum subjecto plano, in quo circa A B describatur circulus, * ita ut ductâ diametro E K L ad A B perpendiculari, non sit ratio E K ad K L major eâ, quam habet A B ad B C. Fiat igitur E K. K M [a] :: A B. B C. & per M ducatur M F ad A B parallela; junctísque A F, E F, B F, per B ducatur B X ad E F parallela. Itaque ob ang. A X B [b] = (A F E [c] = E F B [b] =) F B X, [d] erit F B = F X. Concipiatur jam conus, cujus vertex F, basis circulus super diametrum B X, rectus trigono F B X Erit is conus rectus (ob F B = F X). Producantur F B, F X, M F, & secetur conus plano, ad circulum B X parallelo, [e] facienti proinde circulum G P H R rectum plano F X B, cujúsq; diameter G H communis sit istorum planorum sectio. Sit verò P D R communis sectio circuli G R H, & subjecti plani. Et quoniam tam circulus G R H, quàm subjectum planum recta sunt trigono FGH, [f] erit horum communis sectio P D R eidem trigono F G H recta; [g] ideóque rectis, quæ in eo, G H, D B perpendicularis. Ex quibus liquet

* *vid. not.* 1. a 12. 6. b 29. 1. c 27. 3. d 6. 1. e 4. *hujus.* f 19. 11. g 3. *def.* 11.

liquet coni sectionem P B R (juxta conditiones in 12ma hujus præsti- [h] *constr.*
tutas) esse hyperbolen, cujus vertex B, & ordinatæ ad diametrum A B [k] 2. 6.
in angulo recto applicentur, quippe omnes ad ipsam P R parallelæ. [l] 1. 6.
Porro ob A B . B C [h] :: (E K. K M [k] :: N E. N F [l] :: N E × N F [m] 35. 3.
[m] (N A × N B). N Fq [n] = N A. N F [o] (O F. F G) + N B. N F [n] 23. 6.
([o] O F. F H) [n] =) O Fq. O G × G H [p] :: A B. B C. [q] erit A B trans- [o] 4. 6.
versum latus, & B C rectum. [p] 11. 5.
[q] 12. *hujus.*

Sin datus angulus non sit rectus. Datæ sint rectæ A B, A C, & 2. *Cas.*
angulus B A H per dato. Bisecetur A B in D, & descripto super AD Fig. 86.
semicirculo, occurrat G F ad A H parallela, * faciens G Fq. D G × *vid. not. 2.
G A :: A C. 2 A D; junctaq; F D, [a] fiat F D. D L :: D L. D H; & sum- [a] 13. 6.
ptâ D K = D L, [b] fiat L F. A F :: A F. F M; & connectatur K M, [b] 11. 6.
& per L ducatur N L X ad K F perpendicularis. Describatur tunc [c] 12. *hujus.*
Hyperbole (juxta modò ostensa), cujus vertex L, transversus axis K L, [d] *constr.* & 17.
rectum latus L N; [c] transibit hæc per A [d] (ob L F × F M = A Fq.) [e] 37. *hujus.* (6.
& A H sectionem [e] continget (ob F D × D H = D Lq) [f] & proin- [f] *cor.* 47. *hujus.*
de A B est diameter sectionis. Porro, quum sit A C. 2 A H + F G. [g] 4. 6.
G D [g] = (A C. 2 A H. + A H. A D [h] = A C. 2 A H + 2 A H. [h] 15. 5.
2 A D [k] = A C. 2 A D [l] = F Gq. G A × G D [m] =) F G. G A + [k] 5. *def.* 6.
F G. G D. Erit A C. 2 A H :: (F G. G A [n] ::) O A. A X. [o] unde [l] *constr.*
A C est rectum latus. Ergo factum. [m] 23. 6.
[n] 4. 6.
[o] 50. *hujus.*

Notæ.

1. Describitur circulus circa A B, ita ut E K. K L :: A B. B C, Fig. 87.
hoc pacto.

Fiat utcunque Z K. K Y [a] :: A B. B C. & bisectâ Z Y in V, centro [a] 12. 6.
V, per Z, & Y describatur circulus, secans ipsam A B (si opus est,
productam) in S, & T; connexísque S Y, S Z, per A ducantur ad [b] 29. 1. *et* 2. *ax.*
has parallelæ A L, A E. ergo quum angulus Y S Z rectus sit, [b] erit [c] *conv.* 31. 3.
quoque angulus L A E rectus. [c] ergo super diametrum L E descrip- [d] *cor.* 1. 3.
tus circulus transibit per A, [d] ideóque per B, [e] quia K B = K A. éstq; [e] *hyp.*
E K. Z K [f] :: (A K. S K [f] ::) L K. Y K. & permutando E K. L K :: [f] 4. 6.
(Z K. Y K [g] ::) A B. B C. [g] *constr.*

2. Quomodo autem ducatur G F ad A H parallela, faciens G Fq ad Fig. 88.
D G × G A in data ratione (puta R ad S), ita constabit. Sumpto Z
centro circuli, ducatur Z Y ad A H T perpendicularis, & ab occursu
Y, ducatur Y Q ad A H parallela, [a] quare Y Q tangit circulum. Fiat [a] *cor.* 16. 3.
verò Q V. V Y [b] :: S. $\frac{R-S}{2}$. & productâ Q Y, sumatur Y K = Y V; [b] 12. 6.

con-

connectantúrque Z K, Z V circulum secantes in P, & F; conjunctaq; P F protrahatur ad G. dico factum.

c 4. 1. Nam ob V Y = K Y, & angulos ad Y rectos, [c] erit Z V = Z K.
d 2. 6. item Z F = Z P, [d] ergo F P ad V K, [e] hoc est ad A H, est parallela. Et
e 30. 1.
f constr. quoniam S. $\frac{R-S}{2}$ [f] :: Q V.V Y, erit duplando consequentes, S. R—S :: Q V. V K. & invertendo R—S. S :: V K. Q V. & componendo R. S
* :: (Q K . Q V *:: G P. G F [g] :: G P × G F . G Fq [h] ::) D G × G A.
g 1. 6.
h 36. 3. & 7. 5 G Fq. ac inversè S. R :: G F q. D G × G A. *Q. E. F.*

Prop. LIV. Probl. 3.

Fig. 89. Datis duabus rectis terminatis (A B, A C), atque ad rectos inter se angulos, invenire circa diametrum ipsarum alteram (A B) coni sectionem, quæ Ellipsis appellatur, in eodem plano, in quo sunt datæ lineæ (A B, A C), ita ut vertex sit punctum (A) ad rectum angulum (B A C); & à sectione ad diametrum (A B) applicatæ in angulo dato possint rectangula adjacentia alteri lineæ (A C), quæ latitudinem habeant lineam inter ipsas, & verticem (A) sectionis interjectam, deficiántque figurâ simili, & similiter positâ ei, quæ datis rectis lineis (A B, A C) continetur.

1. *Cas.* Sit datus angulus primò rectus, & ex A B planum attollatur, rectum subjecto plano, in quo circa A B descriptum sit circuli segmentum A D B; & bisecetur arcus A D B in D, unde connectantur D A, D B; & fiat A X = A C; & per X ducatur X O ad B D parallela, & per O ipsa O F ad A B parallela, & juncta D F occurrat protractæ B A in E. Jungantur F A, F B, & producantur, pérque punctum G (utcunque sumptum in F A) productâ) ducatur ipsi E D parallela G H, productæ A B occurrens in K, productæque F O in L. Estque ideò
a 29. 1. ang. H G F [a] = (ang. E F A [b] = F A D [c] (F B D) + F D A [d] (F B A)
b 32. 1. = F B D + F B A [c] = A B D [c] = D F B [a] =) G H F [f] = H G F.
c 26. 3.
d 21. 3. [g] unde F G = F H. Itaque super G H describatur circulus G H N
e 19. ax. 1. rectus trigono H F G, sitque basis coni recti, habentis verticem F. Et
f 1. ax. quia tam circulus G H N, quàm subjectum planum recta sunt plano
g 6. 1.
h 19. 11. H F G, [h] erit ipsorum communis sectio (K M) plano eidem, [k] rectísque
k 3. def. 11. idcirco G K, A K perpendicularis.
l 13. hujus. Liquet igitur planum per A K M [l] facere in cono ellipsin, cui dia-
m 23. 6. meter A B, ad quam ordinatæ omnes perpendiculariter applicentur, quippe ipsi K M parallelæ: porro, ob F Lq . G L × L H [m] = (F L.

G L

GL[n] (AK KG, [n] vel AE. EF) + FL. LH ([n] BK. KH, [n] vel BE. EF) = AE. EF + BE. EF[m] = AE × BE. EFq [o] = DE × EF. EFq [p] = DE. EFq = DA. AO :: [q] BA. AX[r] ::) BA. AC[s] :: FLq. GL × LH. erit AC rectum latus. n 4. 6. o 36.3. & 7.5. p 1.6. q 4.6. r *constr. et* 7.5. s 11. 5.

Sin diameter AB minor ponatur dato recto latere AC; bisectâ AB in D, ducatur FE bisecta quoque in D, ita ut sit AC. FE [a] :: FE. AB. & ductâ FG ad AB parallela, sit FE. FG [b] :: AC. AB ([c] hoc est) :: FEq AB q :: FDq. [d] (FD × DE). ADq [e] :: FE. FG. Ducatur itaque (ut modò ostensum) ellipsis, cujus axis EF (& rectum latus FG; transibit hæc per A, (ob FD × DE ADq [f] :: FE. FG) [g] ideóque per B ([d] ob AD = DB). item propter AC. CB :: FDq. AD × DB (ADq). [f] erit AC rectum latus. 2. *Cas.* Fig. 90. a 13. 6. b 12. 6. c *cor.* 20. 6. d *constr.* e 11. 5. f 21. *hujus.* g 30. *hujus.*

Sed datus angulus non sit rectus; sitque ei æqualis angulus BAD; bisectâque AB in E, circa AE describatur semicirculus, in quo ad AD *ducatur parallela FG, faciens FGq AG × GE :: CA. AB; & junctæ AF, EF producantur; [a] & sit DE. EH :: EH. EF & sumptâ EK = EH, factóque HF. FA [b] :: FA. FL, conjungatur KL, occurrens ductæ NM (per H ad AL) parallelæ. Tum (ex modò præostensis) describatur ellipsis, cujus axis transversus sit KH, & rectum latus HM. [c] transibit hæc utique per A [d] (ob HF × FL = FAq); & [e] idcirco per B (ob AE [e] = EB) ac ipsam [f] continget DA [g] (ob DE × EF = EHq). Item propter CA. 2DA + FG. GE [h] = (CA 2DA + DA. AE [k] = CA. 2DA + 2DA. AB [l] = CA. AB [m] = FGq. AG × GE [n] =) FG. AG + FG. GE. erit CA. 2DA*:: (FG. AG [p] ::) XA AN. [q] ergo AC est rectum latus. 3. *Cas.* Fig. 91. * *vid. Not.* a 13. 6. b 11. 6. c 13. *hujus.* d *constr.* e 30. *hujus.* f *conv.* 38 *huj.* g *constr.* & 17. (6. h 4. 6. k 15. 5. l 5. *def.* 6. m *constr.* n 23. 6. * p 4. 6. q 50. *hujus.*

Notæ.

Quomodo verò duci poterit GF ad AD parallela, ita ut sit GFq ad AG × GE in data ratione S ad R, ita constabit. Fig. 92.

Sumpto Z centro circuli, ducatur ad AD perpendicularis ZY, circulo occurrens in Y. & per Y ducatur QY ad AD parallela; [a] & proinde tangens circulum in Y, occurrénsque productæ ZA in Q. a *cor.* 16. 3.

[b] Fiat autem $\frac{R-S}{2}$. S :: YQ. QV. productâque VY sumatur YK = YV; & junctæ YZ, KZ producantur, adeò ut completo circulo occurrant punctis F, P, & connectatur FP, secans AE in G. Dico factum. b 12. 6.

Nam

c *constr.* & 4. 1. d 2. 6. e 30. 1. f *const.* Nam ob Z V [c] = Z K, & Z P = Z F, [d] erit P F ad V K, [e] hoc est ad A D parallela. [f] item (ob $\frac{R-S.}{2}$ S [f] :: Y Q. Q V,) erit componendo $\frac{R+S}{2}$. S. :: Y V , Q V. & duplando antecedentes, R+S. S :: K V.

g * h 1. 6. k 35. 3. & 7. 5. Q V. & dividendo R . S :: (K Q . Q V [g] :: P G . G F [h] :: P G × G F. G Fq [k] ::) A G × G E. G Fq. & inversè S. R :: G Fq. A G × G E. *Q. E. F.*

Prop. LV. Probl. 4.

Fig. 93. Datis duabus rectis terminatis (E B, B H), atque ad rectos inter se angulos, invenire oppositas sectiones, quarum diameter sit una (EB) datarum linearum; & vertices lineæ termini (E, B); applicatæ verò ab utraque sectione possint spatia adjacentia alteri lineæ (B H), excedentiáque figurâ simili ei, quæ datis lineis (E B, B H) continentur.

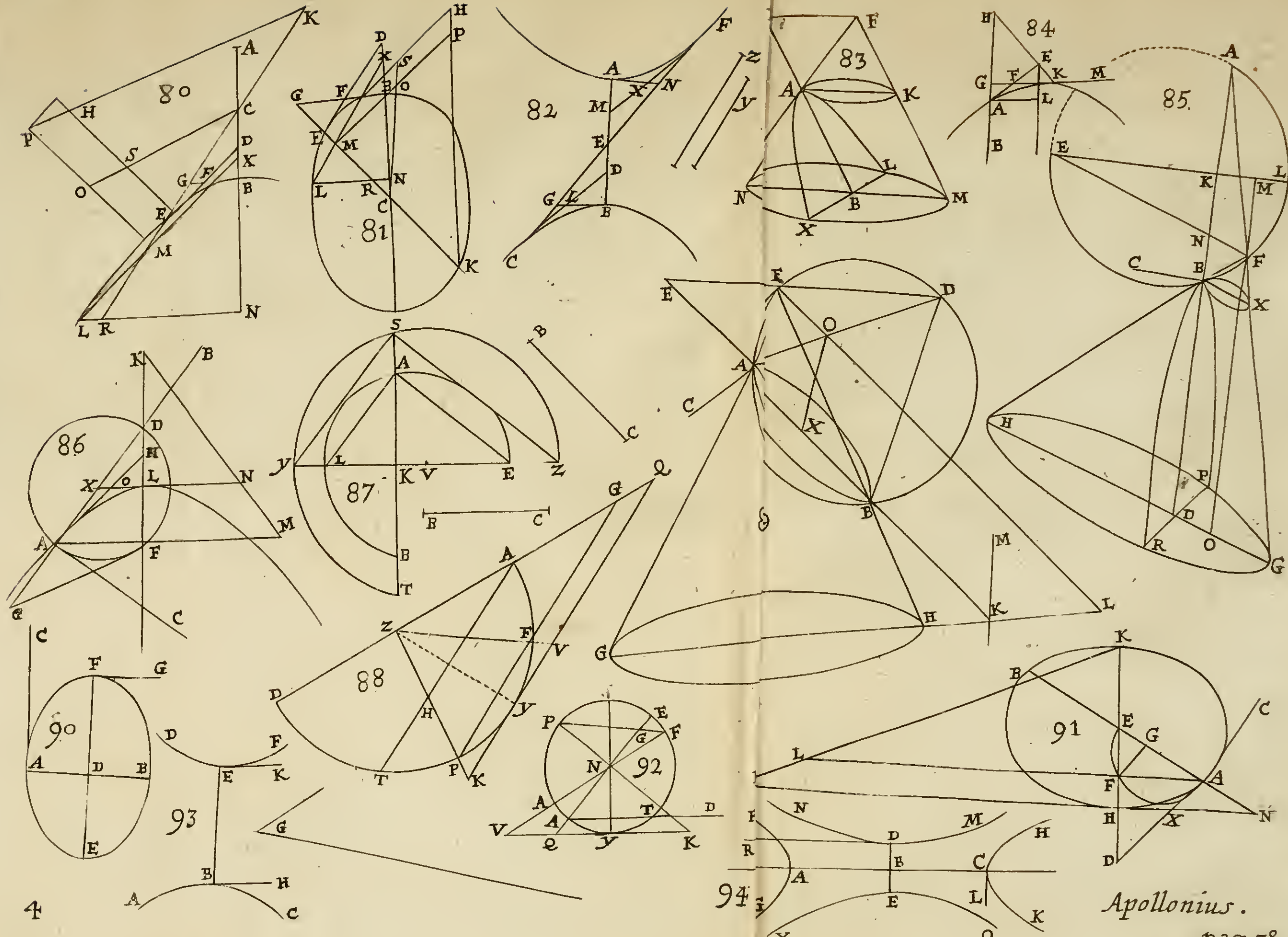
a 53. *hujus.* [a] Describatur hyperbole A B C, cujus diameter transversa sit B E, & rectum latus B H; & ordinatæ ad B E in dato angulo (G) applicentur. Ducatur quoque E K ad rectos ipsi B E, æqualísque ipsi B H, & [a] describatur itidem alia hyperbole D E F, cujus diameter sit E B, rectum latus E K; ductæque ordinatim applicentur in angulo, qui deinceps ipsi G. Liquet igitur descriptas hyperbolas A B C, D E F fore sectiones oppositas, habentes diametrum communem B E, & recta latera B H, E K inter se æqualia. *Q. E. F.*

Prop. LVI. Probl. 5.

Fig. 49. Datis duabus rectis lineis (A C, D E) sese bifariam secantibus (in B), circa utramque ipsarum oppositas sectiones describere, ita ut rectæ lineæ (A C, D E) sint conjugatæ diametri; & quarumlibet oppositarum sectionum diameter possit figuram aliarum oppositarum.

a 11. 6 et 17. 6. b 55. *hujus.* c *def. ad* 16. *hujus.* d *constr.* Sit A C × C L [a] = D Eq; (vel A C, D E, C L ÷) [b] describantúrque sectiones oppositæ F A G, H C K, quarum transversa diameter sit A C, rectum latus C L; & ordinatim ductæ ad C A in dato angulo applicentur. [c] Erit harum secunda diameter ipsa D E; quiâ A C. D E [d] :: D E. C L; [d] & D E ordinatim applicatis parallela bisecatur in B. [a] Sit pariter D E × D R = A Cq. & [b] describantur sectiones oppositæ M D N, O E X, quarum transversa diameter D E, & D R rectum latus; ductæque ordinatim ad D E in dato angulo applicencentur; [c] eritque harum secunda diameter A C, ob D E. A C [d] :: A C. D R, & A C bisectam in B. Ergo factum.

Definitio. Vocentur autem hujusmodi sectiones *Conjugatæ*.



4

Apollonius.

pag. 38

APOLLONII
CONICORUM
LIB. II.

Prop. I.

SI hyperbolen contingat recta linea (D E) ad verticem (B); & ab ipso ex utraque parte sumatur (B D, B E) æqualis ei, quæ potest quartam figuræ partem, lineæ (C D, C E) quæ è sectionis centrò (C) ad sumptos contingentis terminos (D, E) ducuntur, cum sectione non convenient. Fig. 95.

Sumpto utcunque in C D puncto H, ordinatim applicetur H G F. a 21.1. *hujus.*
Estque A F × F B. F Gq [a] :: (T. R [b] :: Tq. T R [c] :: $\frac{Tq}{4}$. $\frac{TR}{4}$ [d] :: b 1. 6. c 15. 5. d *hyp.*
C Bq. B Dq [e] ::) C Fq. F Hq. ergo cùm A F × F B. [f] ⊐ C Fq. [g] erit e 4.6. *et* 22.6.
F Gq ⊐ F Hq. ergo punctum H est extra sectionem. Idémque de f 6. 2.
reliquis rectæ C D punctis ostendetur. ergo tota C H est extra secti- g 14. 5.
onem. *Q. E. D.*

Coroll. C Bq. B Dq :: T. R :: A F × F B. F Gq.

Prop. II.

Iisdem manentibus, ostendendum est, non esse alteram asymptoton C K, quæ angulum D C E dividat. Fig. 96.

Per B ducatur BK ad C D parallela, occurrens ipsi C K in K; & a 34. 1.
per K ducatur H G K F L ad D E parallela. Estque H K [a] = D B, b 5. *ax.* 1.
[b] & K L ⊏ B E. [c] unde H K × K L ⊏ D B × B E vel B Dq. atqui ob c *sch.* 48. 1.
C Bq. B Dq ([d] A F × F B. G Fq) [e] :: (C Fq. F Hq [f] ::) C Fq — A F d *cor.* 1. *hujus.*
× F B. e 4.6. *et cor.* 22. f 19. 5.

(6

g 6.5. & 3. *ax*. h 9 5. (1. k *sch*. 5. 2. × F B. F Hq—G Fq [g] (hoc est C Bq. H G × G L.), [h] est B Dq = H G × G L. ergo H K × K L ⊏ H G × G L. [k] unde punctum K est intra sectionem. & proinde C K sectionem intrat. *Q. E. D.*

Coroll. $HG \times GL = DBq = \frac{1}{4} TR$.

Prop. III

Fig. 97. Si hyperbolen contingat recta linea (H K), cum utraque asymptoton (E F, E G) conveniet; & ad tactum (B) bifariam secabitur; quadratum vero utriusque ejus portionis (BF, BG) æquale erit quartæ parti figuræ, quæ ad diametrum (B D) per tactum ducitur.

a 1. *hujus*. Ducatur diameter B E D, & quartæ parti figuræ ad hanc æquentur singula B Hq, B Kq. erunt ductæ E H, E K asymptoti. [a] ergo hæ non differunt ab ipsis E F, E G.

Prop. IV. *Probl.* 1.

Fig. 98. Datis duabus rectis lineis (A B, AC) angulum (BAC) continentibus, & dato intra angulum (BAC) puncto (D), describere per punctum (D) coni sectionem (quæ hyperbole dicitur, ita ut datæ lineæ (A B, AC) ipsius asymptoti sint.

a 31.1. b 4.6. c *constr*. d *cor*. 4. 2. e 11.6 *et* 17.6. f *prius*. g 53. *hujus*. h 1. *hujus*.

[a] Duc D F ad A B parallelam, & fac F C = F A, & produc CDB. Estque B C. C D [b] :: (C A. C F [c] :: 2. 1). ergo B Cq [d] = 4C Dq = 4B Dq. duc D A E, ita ut A E = D A. & fiat E D × G [e] = B Cq [f] = 4B Dq. [g] Habes igitur diametrum E D, & rectum latus G hyperbolæ, cujus vertex D, [h] asymptoti A B, A C. ergo factum.

Prop. V.

Fig. 99. Si parabolæ, vel hyperbolæ diameter (D B E) lineam quandam (A C) bifariam secet (in E), quæ (F G) ad diametri terminum (B) contingit sectionem, æquidistans est lineæ (A C) bifariam sectæ.

a 46. & 47. 1. *hujus*. b *hyp*. c 2. 6.

Si negas A C esse parallelam ipsi F G, sit ei parallela C H. [a] ergo C K = K H. unde cùm sit quoque C E [b] = E A, [c] erunt A H, E K parallelæ, contra 22. 1. hujus.

Prop.

Prop. VI.

Si ellipsis, vel circuli circumferentiæ diameter (A B) lineam quandam (C D) non per centrum transeuntem bifariam secet (in E), quæ ad diametri terminum (A) contingit sectionem, æquidistans erit bisectæ lineæ (C D). Fig. 100.

Demonstratur, ut præcedens.

Prop. VII.

Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam contingat recta linea (F G); & huic æquidistans (A C) ducatur in sectione; & bifariam dividatur (in E); quæ à tactu (B) ad punctum (E) lineam bifariam dividens jungitur (B E), sectionis diameter erit. Fig. 101.

Nam altera [a] nulla B H bisecabit A C; ergo non erit alia [b] diameter quàm B H.

a 9. *ax.* 1.
b 46. & 47. 1. *hujus.*

Prop. VIII.

Si hyperbolæ occurrat recta linea (A C) in duobus punctis (A, C); producta ex utraque parte conveniet cum asymptotis (D E, D F); & lineæ (A E, C F), quæ ex ipsa abscissæ inter sectionem & asymptotos interjiciuntur, æquales erunt. Fig. 102.

Bisecetur A C in G, ducatúrque D G. [a] hæc diameter est. [b] ergo tangens per B (nempe H K) est ad A C parallela; ergo cùm H K *asymptotis occurrat, [c] sitque B H = B K,* etiam A C eisdem occurret, [d] erítque G E = G F; [e] unde manent A E, C F æquales. *Q. E. D.*

a 7. *hujus.*
b 5. *hujus.*
c 3. *hujus.*
*
d 4. 6.
e 3. *ax.*

Prop. IX.

Si recta linea (C D) occurrens asymptotis (A C, A D) ab hyperbolæ bifariam secetur, (in B) in uno tantum puncto sectionem contingit. Fig. 103.

Occurrat alibi, si fieri potest, in E. ergo E C [a]= (B D [b]= $\frac{1}{2}$ D C [b]=) B C. [c] *Q. E. A.*

a 8. *hujus.*
b *hyp.*
c 9. *ax.* 1.

Prop. X.

Si recta linea (D F) sectionem secans (in A, C) conveniat cum utraque asymptoton (E D, E F), rectangulum contentum rectis lineis (D A, Fig. 104.

(D A, A F) quæ inter asymptotos, & sectionem interjiciuntur, æquale est quartæ parti figuræ factæ ad diametrum (H G), quam æquidistantes ipsi ductæ lineæ (A C) bifariam dividit.

Patet ex corollario 2dæ hujus.

a 1. *ax.* 1. *Cor.* A D × A F [a] = C D × C F.

Prop. XI.

Fig. 105. Si utramque linearum (A E, A C) continentium angulum (EAC), qui deinceps est angulo (D A C) hyperbolen continenti, secet recta linea (E F), in uno tantum puncto cum sectione conveniet; & rectangulum constans ex iis (E G, F G), quæ interjiciuntur inter lineas AE, A C) angulum continentes, & sectionem, æquale erit quartæ parti quadrati ex diametro (A B), quæ secanti lineæ (E F) æquidistans ducitur.

a *cor.* 47. 1. *hujus.*
b 26. 1. *hujus.*
c 5. *hujus.*
d 3. *hujus.*
e 23. 6.
f 4. 6.
g 10. *hujus.*
h 14. 5.

Ducatur A L ad E F parallela. [a] hæc diameter est sectionis. [b] ergo E F in unico puncto (G) occurrit sectioni. Per G ordinatim applicetur H G L K; [c] hæc tangenti C D (per verticem B ductæ) est parallela. C Bq [d] (C B × B D). B Aq [e] = (C B. B A [f] (H G. G F) + B D. B A [f] (G K. G E) [e] =) H G × G K. G F × G E. ergo cùm C Bq [g] = H G × K G, [h] erit B Aq = E G × G F. *Q. E. D.*

Prop. XII.

Fig. 106. Si ab aliquo puncto (D) eorum, quæ sunt in sectione, ad asymptotos (B A, B C) duæ rectæ lineæ (D E, D F) in quibuslibet angulis ducantur; & ab altero puncto (G) in sectione sumpto ducantur aliæ lineæ (G H, G K) his ipsis (D E, D F) æquidistantes, rectangulum constans ex æquidistantibus (G H, G K) æquale est ei, quod fit ex iis (D E, D F), quibus illæ æquidistantes ductæ fuerant.

a *cor.* 10. *hujus.*
b 14. 6.
c 4. 6.
d 11. 5.
e 16. 6.

Connexa G D protrahatur utrinque in A, & C. Estque D A × DC [a] = G A × G C: [b] unde G A. D A [c] (G H. D E) [b] :: (D C. G C [c] ::) D F. G K [d] :: G H. D E. [e] ergo G H × G K = D F × D E. *Q. E. D.*

Prop. XIII.

Fig. 107. Si in loco asymptotis (A B, A C) & sectione terminato, quædam recta linea (E F) ducatur, æquidistans asymptoton alteri (A B); in uno tantùm puncto cum sectione conveniet.

Si

Si primò negas E F sectioni occurrere, per G (punctum utcunque sumptum in sectione) ducantur G C, G H ad A B, A C parallelæ. Sitque A E × E F [a] = G C × G H; connexa A F [b] sectioni occurret, puta in K. Ex quo ducantur K L, K D ipsis A B, A C itidem parallelæ. ergo K L × (A L) K D [c] = (G H × G C [d] =) A E × E F. [e] *Q.E.A.* Proinde E F sectioni occurret, nempe in M. Dic alibi occurrere, puta in N. ducantúrque M X, N B ad A C parallelæ. ergo E M × M X [f] = (E N × N B [g] =) E N × M X. [h] *Q. E. A.* a 12.6.et 16.6. b 2. hujus. c 12. hujus. d constr. e 9. ax. f 12. hujus. g 34. 1. & sch. h 9. ax. (48. 1.

Prop. XIV.

Asymptoti (A B, A C), & sectio in infinitum productæ ad seipsas propius accedunt; & ad intervallum perveniunt minus quolibet dato intervallo (K). Fig. 108.

Ducantur E H F, C G D tangenti utcunque parallelæ; pérque A, & occursum H jungatur A H X. Estque C G × G D [a] = E H × H F. [b] quare G D . H F :: E H . C G. ergo cùm G D ⊏ (X D ⊏) H F, [c] erit E H ⊏ C G; pariterque omnes decrescunt versùs partes C G. Sumatur E L ⊐ K, ducatúrque L N ad A C parallelæ; [d] hæc sectioni occurret, puta in N, per quod ducatur M N B ad E F parallela. Estque M N [e] (= E L) [f] ⊐ K, *Q. E. D,* a 10. hujus. & 1. ax. b 14. 6. c 14. 5. d 13. hujus. e 34. 1. f constr.

Cor.

Ex hoc manifestum est lineas A B, A C ad sectionem accedere propius, quàm omnes aliæ asymptoti (quales A Y, A Z); & angulum B A C minorem esse quolibet angulo, qui aliis ejusmodi lineis continetur.

Prop. XV.

Oppositarum sectionum (A, B) asymptoti communes sunt. Fig. 109.

Sint A B diameter, C centrum, ac D E, F G contingant sectiones in A, B; è quibus utrinque abscindantur AD, A E, B F, B G, ut singularum quadrata æquentur quartæ parti [a] figuræ ad A B: itaque junctæ C D, C E sectionis A, & C F, C G, sectionis B [b] asymptoti erunt. quoniam verò utraque D E, F G ordinatim applicatis ad A B est parallela; & [c] proinde sibi invicem istæ parallelæ sunt, [d] erit ang. B A C = G B C; paresque [e] sunt A C, B C; [f] & A D, B G. [g] ergo ang. A C D = ang. B C G. [h] ergo D C G est recta linea. Similiterque a 14. 1. hujus. b 1. hujus. c 30. 1. d 29. 1. e hyp. f constr. g 4. 1. h cor. 15. 1.

terque E C F recta est. Unde patet propositum.

Coroll. Tangentes D E, F G parallelæ sunt sibi invicem.

Prop. XVI.

Fig. 110. Si in oppositis sectionibus (A, B), ducatur quædam recta linea (H K), secans utramque linearum (C D, C F) continentium angulum (D C F), qui deinceps est angulo (D C E, vel G C F) sectiones continenti; cum utraque oppositarum in uno tantùm puncto conveniet, & lineæ (H L, K M), quæ ex ipsa abscissæ inter asymptotos (C D, C F), & sectiones interjiciuntur, æquales erunt.

a 11 hujus. b 29.1. hujus. c 16. 6. d 9. 5. Quod H K sectionibus occurrat, [a] manifestum est; occurrat punctis L, M; pérque centrum C ducatur A B ad L M parallela. Estque K L × L H [a] = (A Cq [b] = B Cq [a] =) H M × M K. [c] ergo K L. M K :: H M . L H. & componendo L M . M K :: M L. L H. [d] unde M K = L H, *Q. E. D.*

Prop. XVII.

Fig. 111. Oppositarum sectionum (A, B; C, D) quæ conjugatæ appellantur, asymptoti communes sunt.

a cor. 15. hujus. b def. ad 16. & 17. 6. c cor. 4. 2. d 1. & 16. hujus. Sint A B, C D conjugatæ diametri sectionum; pérque vertices A, B, C, D ducantur tangentes F G, K H, F K, G H; [a] Liquet, F G H K esse parallelogrammum, & diagonales F H, G K esse asymptotos; nam figuris ad A, B [b] æquatur C Dq, [c] hujúsque quartæ parti singula A Fq, A Gq, B Hq, B Kq æquantur. [d] unde F H, G H sunt asymptoti sectionum A, B. pariterque hæ asymptoti sunt sectionum C, D. quare constat propositum.

Prop. XVIII.

Fig. 112. Si uni (C) oppositarum sectionum, (A, B; C, D) quæ conjugatæ dicuntur, occurrat recta linea (E F), & producta ad utrasque partes extra sectionem cadat; cum utraque (A, B) sectionum, quæ deinceps sunt, in uno tantùm puncto conveniet.

a 13. hujus. b 16. hujus. Sint G H, L K asymptoti, [a] his occurrit E F. [b] ergo liquet propositum.

Prop.

Prop. XIX.

Si in oppositis sectionibus (A, B, C, D) quæ conjugatæ appellantur, Fig. 113.
ducatur recta linea (E F), ipsarum quamvis (C) contingens cum secti- * *per praeced.*
onibus (A, B), quæ deinceps sunt, * conveniet (in G, H); & ad ta-
ctum (C) bifariam secabitur.

Sint K L. M N asymptoti. Et ob C E [a] = C F, & E G [b] = F H, a 3. *hujus.* b 16. *hujus.*
[c] erit C G = C H. *Q. E. D.* c 3. *ax.* 1.

Prop. XX.

Si oppositarum sectionum (A,B,C,D) quæ conjugatæ appellantur, Fig. 114.
unam (A) contingat recta linea (E F); & per ipsarum centrum (X)
ducantur duæ lineæ; una quidem (E X) per tactum, altera verò (X G)
contingenti (E F) æquidistans; quousque occurrat (in G) uni (C)
earum sectionum, quæ deinceps sunt; recta linea (G H) quæ in oc-
cursu (G) sectionem contingit, æquidistans erit lineæ (E X) per ta-
ctum, & centrum ductæ; quæ verò (E Z, G O) per tactus, & cen-
trum ducentur, oppositarum sectionum conjugatæ diametri erunt.

Sint A M, C N [a] recta sectionum latera, & per puncta E, G, C or- a 14.1. *hujus.*
dinatim applicentur E K, G L, C R P. Estque X K. K E. + F K. K E b 23. 6.
[b] = (X K × F K. K Eq [c] = B A. A M [d] :: N C. C D :: [c] G Lq. L X × c 37. 1. *hujus.*
L H [b] =) G L. L X + G L. L H. atqui (ob L X ad E K, & L G ad d *vid. Not.* e 4. 6.
X K, & G X ad E F parallelas) [e] est F K. K E :: G L. L X. ergo ma- f 6. 6.
net X K. K E :: G L. L H. [f] ergo trigona E K X, H L G similia sunt. g 29. 1.
[f] & ang. E X K = H G L. itemque totus ang. G X K [g] = X G L. [h] er- h 3. *ax* 1.
go manet ang. E X G = H G X. [k] quare rectæ E X, G H parallelæ k 27. 1.
sunt.

Porro, fiat P G. G R [l] :: H G. S. [m] est ergo 2 S, juxta quam pos- l 12. 6.
sunt ordinatæ ad diametrum G O. item T X × K E (× X V) [n] = C Xq; m 51.1. *hujus.*
([o] vel T X, C X, K E ÷÷) [p] quare T X. K E ([c] hoc est T F. F E, [q] vel n 38. 1 *hujus.* o 17. 6.
triang. T X F. F X E) :: (T Xq. C Xq. [p] ::) triang. T X F. X C P. p *cor.* 20. 6.
ergo triang. F X E [r] = (X C P [s] =) H X G. item ang. X E F [g] = q 1. 6.
X G H. ergo reciprocè G H. E X [t] :: E F. G X. [u] unde G H × G X r 9. 5.
= E X × E F. ergo S × G X. E X × E F [x] :: (S. × G X. G H × G X s *sch.* 43. *huj.* t 15. 6.
[y] :: S. G H [z] :: G R. G P [a] :: E X. E F [y] ::) E Xq. E X × E F. ergo E Xq u 16. 6.

x 7. 5. y 2. 6. z *constr. et inversè.* a 4. 6.

[b] =

b 5.5. c priùs. d cor. 4. 2. e 6. ax. 1. f def. ad 16. 1. hujus.

[b] = (S × G X [c] =) $\frac{1}{4}$ fig. ad G O. quare E Zq [d] (4 E Xq) [e] = fig. ad G O. Simili diſcurſu erit G Oq figuræ ad E Z æquale. quare E Z, G O [f] ſunt conjugatæ diametri. *Q. E. D.*

Not. Quòd B A. A M :: N C. C D, ſic patet. Quoniam [f] N C. B A :: B A. C D. & B A. C D :: C D. A M. erit ex æquali N C. C D :: (B A. A M.

Cor. B A. A M :: N C. C D.

Prop. XXI.

Fig. 115. Iiſdem poſitis, oſtendendum eſt, punctum (E), in quo contingentes lineæ (A E, C E) conveniunt, ad unam aſymptoton eſſe.

a 34. 1. b 3. hujus. c hyp. d 1. hujus.

Nam quia C Xq ([a] vel A Eq) [b] æquatur $\frac{1}{4}$ C Dq, [c] hoc eſt quartæ parti figuræ ad A B, [d] erit X E aſymptotos.

Prop. XXII.

Fig. 116. Si in oppoſitis ſectionibus (A, B, C, D) quæ Conjugatæ appellantur, ex centro (X) ad quamvis ſectionem (C) ducatur recta linea (XC) & huic æquidiſtans ducatur altera (E K L H) quæ cum una (A) ex ſectionibus, quæ deinceps ſunt, & cum aſymptotis (X E, X F) conveniat; rectangulum conſtans ex portionibus (E K, K H) lineæ ductæ inter ſectionem, & aſymptotos interjectis, quadrato lineæ (X C) quæ ex centro ducitur, æquale erit.

a 5. hujus. b 48. 1. hujus. c 20. hujus. d 10. hujus. e cor. 4. 2.

Biſecetur K L in M, ducatúrque (per M, & X) recta M A X B; Igitur tangenti ad A [a] parallela eſt E H; eadémque proindè ad A B diametrum [b] ordinatim applicatur; & A B, C D [c] ſunt conjugatæ diametri; quare E K × K H [d] = ($\frac{1}{4}$ T R [e] =) C Xq.

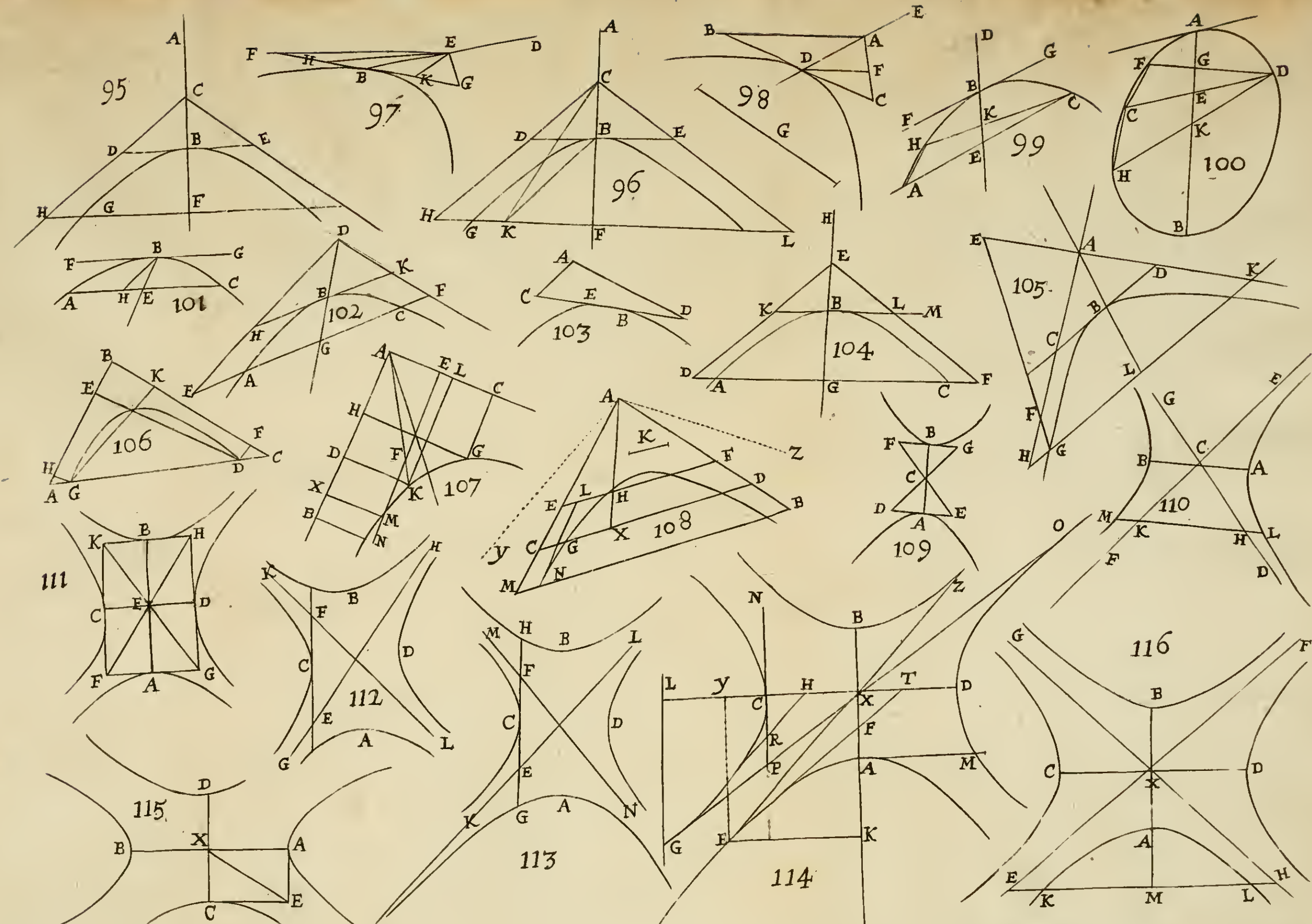
Cor. E K × K H = C Xq.

Prop. XXIII.

Fig. 117. Si in oppoſitis ſectionibus A, B, C, D) quæ conjugatæ appellantur, ex centro (X) ducatur quædam recta linea (X C) ad quamvis ſectionem (C); & huic æquidiſtans (K L) ducatur, quæ cum tribus, quæ deinceps ſunt, ſectionibus (C, A, D) conveniat, rectangulum conſtans ex portionibus (K M, M L) lineæ ductæ (K L) inter tres ſectiones interjectis, duplum erit quadrati ejus lineæ (X C), quæ ex centro ducitur.

a cor. 22. huj. b 11. hujus. c 1. ax. 1.

Sint E F, G H ſectionum aſymptoti. ergo H M × M E [a] = (C Xq [b] =) H K × K E, [c] quare 2 C Xq = (H M × M E + H K × K E. =) L M,


95
97
96
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116

LM × MK. (Nam LM × MK[d] = LH × MK [e](KE × MK) + HM × MK[d] = KE × MK + HM × ME + KE × HM [e] = KE × HK + HM × ME.) [d] 1.6. [e] 16. hujus.

Prop. XXIV.

Si parabolæ occurrant duæ rectæ (A B, D C), utraque in duobus punctis, & nullius ipsarum occursus, alterius occursibus contineatur, convenient inter se extra sectionem. Fig. 118.

Per B, C puncta ductæ sint diametri E F, G H. [a] Hæ parallelæ sunt, [b] nec alibi occurrunt sectioni. unde junctâ B C, erunt anguli A B C, D C B simul duobus rectis majores. [c] ergo A B, D C extra sectionem concurrent ad partes E G. [a] cor. 46. 1. huj. [b] 26. 1. hujus. [c] 13. ax. 1.

Prop. XXV.

Si hyperbolæ occurrant duæ rectæ lineæ (E F, G H), utraque in duobus punctis, nullius autem ipsarum occursus alterius occursibus contineatur, convenient quidem inter sese extra sectionem, sed tamen intra angulum (B A C) qui hyperbolen continet. Fig. 119.

Ducantur A F, A H, & connectatur F H. & quoniam E F, G H secant angulos A F H, A H F, concurrent intra angulum F A H, & propterea magis intra angulum B A C. Idem discursus valet, si utraq; E F, G H sectionem contingunt; aut si una contingat, altera duobus punctis secet. vid cor. 31. 1. hujus.

Prop. XXVI.

Si in ellipsi, vel circuli circumferentia, duæ rectæ lineæ (C D, E F) non transeuntes per centrum (H), se invicem secent (in G), bifariam sese non secabunt. Fig. 120.

Per G ducatur diameter A B; süntque omnes, quas A B bisecat, tangenti ad A [a] parallelæ, & proinde sibi invicem parallelæ. Ergo C D, E F non bisecantur in G. *Q. E. D.* [a] 6. hujus.

Prop. XXVII.

Si ellipsim, vel circuli circumferentiam contingant duæ rectæ lineæ (C D, E F; & siquidem ea (A B), quæ tactus (A, B) conjungit, per Fig. 121. 122.

centrum transeat sectionis, contingentes lineæ (C D, E F) sibi ipsis æquidistabunt; sin minùs, convenient inter sese ad easdem partes centri.

a 6. hujus. b 30. 1. c ex priore parte hujus. d 29. 1. e 13. ax. 1.

Si A B per centrum transit, [a] erit utraque C D, E F ordinatim applicatis parallela, [b] ergo sibi invicem. Sin A B non transeat, per centrum, ducatur diameter A H, & per H tangat K L. [c] ergo C D, K L parallelæ sunt: [d] quare anguli B A H, K H A duobus rectis minores sunt. [e] ergo E F, H K convenient ad partes B H: & proinde E F, A C convenient ad partes A B. *Q. E. D.*

Conversè; si C D, K H æquidistent, transibit recta quæ tactus connectit per centrum.

Prop. XXVIII.

Fig. 123. Si in coni sectione, vel circuli circumferentia duas lineas æquidistantes (A B, C D) bifariam secet recta linea (F E) diameter erit sectionis.

Sola enim F E bisecat parallelas ad A B.

a 5. & 6. huj. b 46. et 47. 1. hujus.

Si fieri potest, sit alia F G diameter. [a] ergo quæ tangit sectionem in G, est ubique A B, C D parallela. unde C H [b] $=$ ($\frac{1}{2}$ C D $=$) C E. *Q. E. A.*

Prop. XXIX.

Fig. 124. 125. Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam contingentes duæ rectæ lineæ (B A, C A). in idem punctum (A) conveniant; & ab eo, ad punctum (D), quod lineam (B C) tactus (B, C) conjungentem bifariam secat. ducatur alia linea (A D), sectionis erit diameter.

*

a 5. hujus. & 47. 1. huj. b hypoth. c * d 1. ax. e 9. ax.

Si fieri potest, sit alia D E diameter; jungatúrque C E, * sectioni occurrens in F, per quod ducatur F H K G ad C B parallela. ergo F H [a] $=$ H K. item (ob C D [b] $=$ D B) [c] est F H $=$ H G. [d] ergo H K $=$ H G.* *Q. E. A.*

Prop. XXX.

Fig. 126. Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam contingentes duæ rectæ lineæ (B A, C A) in unum punctum (A) conveniant, diameter (A D), quæ ab eo puncto ducitur lineam (B C) tactus (B, C) conjungentem bifariam secabit.

a 29. hujus. b cor. 46. 1. huj.

Si fieri potest sit B E $=$ E C; ducatúrque A E. [a] ergo A E est quoque diameter sectionis. [b] ergo in parabola A E, A D sunt parallelæ;

læ; in reliquis sectionibus A [c] est centrum. Quæ sunt absurda. c vid. 47. 1. hujus.

Prop. XXXI.

Si utramque oppositarum sectionum (A, B) contingant duæ rectæ lineæ (CD, EF), siquidem ea (AB), quæ tactus (A, B) conjungit, per centrum transeat, contingentes lineæ (CD, EF), æquidistantes erunt; sin minus, convenient inter sese ad easdem partes centri. Fig. 127. 128.

Probatur, ut 27ma hujus.

Prop. XXXII.

Si utrique oppositarum sectionum occurrant rectæ lineæ (AB, CD), ipsas vel in uno puncto contingentes, vel in duobus secantes, & productæ inter se conveniant; punctum in quo conveniunt, erit in angulo (KLG), qui deinceps est angulo (GLH, vel FLK) sectiones continenti. Fig. 129.

Sint FG, HK sectionum asymptoti; hisce [a] occurret utraque AB, CD. productæ igitur occurrent sibi invicem sub angulo HLF, vel GLK, prout inclinantur ad has, aut illas partes. a 8. hujus.

Prop. XXXIII.

Si oppositarum sectionum (A, B) uni (A) occurrens recta linea (CD) ex utrâque parte extra sectionem cadat; cum altera sectione (B) non conveniet; sed transibit per tres locos, quorum unus quidem est sub angulo sectionem continente, duo verò sub iis angulis, qui deinceps sunt. Fig. 130.

Liquet CD [a] occurrere asymptotis duobus punctis; ergo non alibi; ergo non alteri sectioni, quam semper complectuntur asymptoti. a 8. hujus.

Prop. XXXIV.

Si oppositarum sectionum unam (A) contingat recta linea (CD); & huic ducatur æquidistans (EF) in altera sectione (B); quæ à tactu (A) ad (G) medium lineæ æquidistantis (EF) ducitur (AG), oppositarum sectionum diameter erit. Fig. 131.

Si fieri potest, sit altera AK diameter. [a] ergo tangens per occursum H parallela est ad CD, ideóque ad EF. [b] quare EK [b] = (KF = ½ EF [c] =) EG. [d] Q. E. A. a 5 hujus. b 47. 1. hujus. c hyp. d 9. ax. 1.

Prop. XXXV.

Fig. 132. Si diameter (A B) in oppositarum sectionum una (B) rectam lineam (C D) bifariam secet (in E); quæ in diametri termino (A) contingit alteram sectionem (A), lineæ bisectæ (C D) erit æquidistans.

a 48. 1. hujus.
b hyp.
c 2. 6.
d 22. 1. huj.

Si fieri potest, sit altera D F tangenti parallela. ergo D G [a] = G F. Item D E [b] = E C. [c] ergo C F ad E G est parallela. [d] Q.E.A.

Prop. XXXVI.

Fig. 133. Si in utraque oppositarum sectionum (A, B) ducantur rectæ lineæ (C D, E F) inter se æquidistantes, quæ (G H) ipsarum medium conjungit, oppositarum sectionum diameter erit.

a 5. hujus.
b 30. 1.
c 48. 1. hujus.
d hyp.
e 9. ax. 1.

Si fieri potest, sit altera G K diameter: [a] ergo tangens per A ad C D parallela est; [b] adeóque ad E F. unde E K([c] = KF = $\frac{1}{2}$ E F[d] =) E H. [e] Q. E. A.

Prop. XXXVII.

Fig. 134. Si oppositas sectiones (A, B) secet recta linea (C D), non transiens per centrum X; quæ (E X) ab ipsius medio (E) ad centrum ducitur, oppositarum sectionum diameter erit, quæ recta appellatur: transversa verò diameter, ipsi conjugata, est ea (A B), quæ per centrum ducitur æquidistans lineæ bisectæ (C D).

a 30. 1. hujus.
b hyp.
c 2. 6.
d 4. 6.
e 34. 1.
f 6. hujus.
g 16. 1. hujus.

Ducatur D X sectioni [a] occurrens in F, & connectatur F C, & producatur B A G. Atque ob C E [b] = E D; & F X [a] = X D [c] erit F C ad X E parallela, & F G [d] = (X E [e] =) GC. [f] quare F C tangenti ad A parallela est. [g] ergo A B, & E X sunt conjugatæ diametri. Q.E.D.

Prop. XXXVIII.

Fig. 135. Si oppositas sectiones (A, B) contingant duæ rectæ lineæ (C X, D X), convenientes in uno puncto (X); quæ (X E) ab eo puncto ad medium (E) lineæ (C D) tactus (C, D) conjungentis ducitur, oppositarum sectionum diameter erit, quæ recta vocatur, transversa verò ipsi conjugata (A B), quæ per centrum ducitur, æquidistans lineæ (C D) tactus conjungenti.

Si

Si fieri poteſt, ſit altera E F recta diameter, cui occurrat D X (producta in F; & connectatur C F, [a] ſectioni occurrens in A; per quod ducatur A B ad C D parallela. ergo A G [b] = G B. item (ob C E [c] = E D) eſt A G [d] = G K. [e] unde G B = G K. [f] *Q. E. A.* a 32. 1 *hujus.* *b 12. *def.* 1 *hujus.* c *hyp.* d *cor.* 2. 6. e 1. *ax.* *f.* 9. *ax.*

Prop. XXXIX.

Si oppoſitas ſectiones (A, B) contingant duæ rectæ lineæ (C E, D E) in unum punctum (E) convenientes; quæ (E F) per punctum illud (E), & centrum ducitur, lineam tactus (C, D) conjungentem bifariam ſecabit. Fig. 136.

Si fieri poteſt, ſit CG = GD. [a] ergo ducta GE erit diameter: [b] atqui F E eſt diameter. ergo interſectio E eſt centrum ſectionis. [c] *Q. E. A.* a 38. *hujus.* b *hyp.* c 32. *hujus.*

Prop. XL.

Si oppoſitas ſectiones (A, B) contingentes duæ rectæ lineæ (C E, E D) in unum conveniant; & per punctum (E), in quo conveniunt, ducatur linea (F G) æquidiſtans tactus conjungenti (C D), & ſectionibus occurrens (in F, G); quæ (F H, G H) ab occurſibus ad medium (H) lineæ (C D) tactus conjungenti ducuntur, ſectiones ipſas contingunt. Fig. 137.

Ducatur E H, [a] erit hæc recta diameter; & tranſverſa A B, ducta per centrum X ad C D parallela: unde E X × X H [b] æquatur quartæ parti figuræ ad A B. Hinc, cùm F E [c] ſit ordinatim applicata, [d] liquet F H tangere ſectionem A. Pari modo G H ſectionem B continget. *Q. E. D.* a 37. *hujus.* b 38. 1 *hujus.* c 38. *hujus.* d 38. 1. *hujus.*

Prop. XLI.

Si in oppoſitis ſectionibus duæ rectæ lineæ (A D, C B), ſe invicem ſecent, (in E) non tranſeuntes per centrum (X), ſeſe bifariam non ſecabunt. Fig. 138.

Ducatur E X; ergo ſi A D, C B ſe mutuò biſecent in E, [a] erit E X diameter conjugata illi X F, quæ per X ducitur ad C B parallela; eritq; E X * tangenti ad F parallela. Pariterque (ductâ X H ad D A parallelâ) erit E X tangenti ad H parallela. [c] Ergo tangentes ad F, H ſibi invicem parallelæ ſunt. [c] *Q. E. A.* a 37. *hujus.* * *vid.* 37. *hujus.* c 31. *hujus.*

Prop. XLII.

Fig. 139. Si in oppositis sectionibus (A, B; C, D) quæ conjugatæ appellantur, duæ rectæ lineæ (E F, GH) se invicem secent, non transeuntes per centrum (X); bifariam sese non secabunt.

Per centrum X ducantur A B ad E F, & C D ad G H parallelæ, & connectatur X K: posito igitur ipsas E F, G H se mutuò bisecare, [a] erunt X K, A B, & X K, C D conjugatæ diametri, unde tangens per A tangenti per C erit parallela (utpote utraque ipsi X K) quod fieri nequit: [b] conveniunt enim hæ ad unam asymptoton. Ergo E F, G H se mutuò non bisecant.

a 37. *hujus.*
* 5. *hujus.*
b 21. *hujus.*

Prop. XLIII.

Fig. 140. Si unam (A) oppositarum sectionum (A, B; C D) quæ conjugatæ appellantur, secet recta linea (E F) in duobus punctis (E, F); & à centro (X) ducantur duæ lineæ (X G, X C), una quidem (X G) ad medium (G) lineæ secantis (E F), altera verò (X C) ipsi (E F) æquidistans, erunt hæ (X G, X C) oppositarum sectionum conjugatæ diametri.

Nam quia tangens in A ad E F [a] parallela est; & [b] proinde ad C X, [c] erunt A X, C X conjugatæ diametri.

a 5. *hujus.*
b *hyp.* & 30.1.
c 20. *hujus.*

Prop. XLIV. Probl. 2.

Fig. 141. Datâ coni sectione (A C E), diametrum invenire.

Analysis. Factum sit; & sit C H diameter; & ad hanc ordinatim applicentur A E, B D: bisecat has diameter C H in H, & F.

Compositio. Ducatur utcunque recta A E sectionem secans punctis A, B; & huic parallela fiat BD; bisecentur hæ in H & F; & connectatur H F C. [a] Erit H C diameter sectionis. Eodem licet modo infinitas diametros invenire.

a 28. *hujus.*

Prop. XLV. Probl. 3.

Fig. 142. 143. Datâ ellipsi, vel hyperbola centrum invenire.

[a] Duæ ducantur utcunque sectionis diametri A B, C D; erit harum intersectio centrum sectionis.

a 44. *hujus.*

Prop. XLVI. Probl. 4.

Datæ parabolæ (F C E) axem invenire. Fig. 144.

Analysis. Sit C D axis, eíque perpendicularis F E; eſt ergo FD = D E. Quòd ſi ducatur utcunque diameter AB, [a]erit hæc ipſi CD parallela; atque idcirco ipſi F E perpendicularis. Hinc [a] 46. 1. *hujus.*

Componitur ſic. [a] Ducatur utcunque diameter A B, eíque [b] ſtatuatur perpendicularis E F; biſectaque E F in D, [b] erigatur perpendicularis D C; erit hæc axis parabolæ: eſt enim D C diameter, [a]quia parallela diametro A B; & biſecat ipſi perpendiculares E F, (neque enim ulla alia ipſas biſecabit) [c]ergo eſt axis. [a] 44. *hujus.* [b] 11. 1. [c] 18. *def.* 1. *hujus.*

Prop. XLVII. Probl. 5.

Datæ hyperbolæ, vel ellipſis (A B C) axes invenire. Fig. 145. 146.

Analyſis.

Eſto K D axis; ergo [a] biſecat hæc ſibi perpendiculares utcunque ductas A C, in D. Itaque ſi è K [b] centro ſectionis connectantur K A, KC, [c] erunt K A, K C æquales. Hinc [a] 18. *def.* 1. *hujus.* [b] 45. *hujus.* [c] 4. 1.

Compoſitio.

[d] Sume K centrum ſectionis, & centro K duc utcunque circulum A E C, ſectioni occurrentem punctis A, C, quæ connectat recta AC; biſecetur autem A C in D, & connectatur DK. Erit DK axis. [d] 45. *hujus.* Fig. 147. 148.

Nam ductis K A, K C, [e] liquet trigona K D A, K D C ſibi mutuò eſſe æquilatera, & [f] proinde æquari angulos K D A, K D G; ac idcirco rectos eſſe: [g] unde K D eſt axis. [e] *conſtr.* [f] 8. 1. [g] 18. *def.* 1. *huj.*

Quòd ſi per K ducatur MN ipſi AC parallela,[h] erit M N axis conjugatus ipſi K D. [h] 16. 1. *hujus.* & 19. *def.* 1. *h.*

Prop. XLVIII.

His autem demonſtratis, ſupereſt ut oſtendamus non eſſe alios axes ipſarum ſectionum.

Si fieri poteſt, ſit alius axis K G. ergo ductâ ad hanc perpendiculari A H, [a] erit L H = A H; adeóque (junctâ K L) K L [b] = (K A [c] =) K C: ideóque circulus A E C etiam tranſit per L, quod in hyperbola manifeſtè abſurdum; in ellipſi verò, ducantur C R, L S ad M N perpendiculares. Et propter L Sq + S Kq [d] = (L Kq [e] = C Kq [d] =) C Rq + R Kq. & M S × S N + S Kq [f] = (K Mq [f] =) M R × R N, + R [a] 18. *def.* 1. *huj.* [b] 4. 1. [c] *conſtr.* [d] 47. 1. [e] *prius.* [f] 5. 2.

h 3. *ax.* 1. $+$ R Kq. erit L Sq $-$ C Rq [g] $=$ (R Kq $-$ S Kq [g] $=$) M S $\times$ S N $-$
k 2. *ax.* 1. M R $\times$ R N. & [k] proinde L S q $+$ M R $\times$ R N $=$ C Rq $+$ M S $\times$
S N. Verùm (ob ordinatim applicatas L S, C R) eſt L Sq . M S $\times$
l 21. 1. *hujus.* S N [l] :: C Rq M R $\times$ R N. ergo L Sq $=$ M S $\times$ S N. & C R q $=$
m 25. 5. M R $\times$ R N. (Nam ſi L Sq $\sqsubset$ vel $\sqsupset$ M S $\times$ S N, [m] eſſet hinc L S q
n *conv.* 35. 3. $+$ M R $\times$ R N. $\sqsubset$ vel $\sqsupset$ C Rq $+$ M S $\times$ S N, contra modò oſtenſa). [n] Unde ſectio A B C circulus eſſet (non verò Ellipſis) contra hypotheſin.

Prop. XLIX. *Probl.* 6.

Fig. 149. Datâ coni ſectione, & puncto (A), non intra ſectionem, dato, ab eo ducere rectam lineam (A D), quæ ſectionem contingat.

* 47. *hujus.* Sectio data primò ſit Parabola, cujus * axis B E punctum datum A
1. *Caſ.* ſit in ipſa ſectione.

Analyſis. Tangat A D, axi B C occurrens in D, ductâque A E
a 35. *hujus.* ad B C perpendiculari, [a] erit B E $=$ B D. Itaque

Compoſ. Si ex dato puncto A ducatur AE perpendicularis axi BC,
b 33. 1. *hujus.* & in axe producto ſumatur B D $=$ B E, jungatúrque D A, liquet [b] hanc parabolen tangere.

2. *Caſ.* Punctum A ſit in ipſo axe.

Fig. 150. *Analyſis.* Tangat A D; ductáque ſit D E axi B C perpendicu-
c 35. 1. *hujus.* laris: itaque rurſus eſt A B [c] $=$ B E.

Compoſ. Sumatur B E $=$ A B; & ab E ducatur E D axi perpen-
d 33. 1. *hujus.* dicularis; ſectioni occurrens in D, & connectatur D A; [d] continget hæc ſectionem.

3. *Caſ.* Sin datum punctum coincidat vertici B, [e] liquet ductam per B axi
e 17. 1. *huj.* perpendicularem eſſe contingentem.

4. *Caſ.* Punctum A datum ſit alibi extra axem.

Fig. 151. *Analyſis.* Tangat A D. itaque ductâ A E ad axem B C parallelâ,
f *cor.* 46. & 35. 1. *hujus.* & ordinatim applicatâ D E, erit rurſus G E [f] $=$ A G.

Compoſ. Per A ducatur A E axi parallela, factóque G E $=$ A G,
g 46. & 33. 1. *hujus.* per E ordinatim applicetur E D, ſectioni occurrens in D, & conjungatur D A: [g] liquet hanc ſectionem contingere.

h 47. *hujus.*
k 45. *hujus.* Sectio data ſit ſecundò Hyperbola; cujus [h] axis tranſverſus K B, [k] centrum F, aſymptoti F L, F M.

1. *Caſ.* Punctum datum A ſit in ſectione.

Fig. 152. *Anal.* Tangat A D; & ſit A E perpendicularis axi B C; eſt igi-
m 36. 1. *hujus.* tur K E. E B [m] :: K D. D B.

Com-

Compos. E puncto A ducatur A E axi perpendicularis,[n] secetúrque KB in D, ut sit KD. DB :: KE. EB; jungatúrque DA. [o] Continget hæc sectionem. n 16. 6. o 34.1. hujus.

Punctum A sit in axe. 2 *Cas.*

Anal. Tangat AD, & sit DE axi perpendicularis: itaque rursus KE. EB :: [m] KA. AB. Fig. 153.

Compos. * Fiat KE. EB :: KA. AB. & per E ducatur axi perpendicularis ED, sectioni occurrens in D; & connectatur DA; [o] hæc sectionem continget. * *Not.* 1.

Sit datum punctum A alicubi intra angulum LFM. 3 *Cas.*

Anal. Tangat AD, junctáque FA producatur, & fiat FO = FN; & * ordinatim applicetur DE. Est ergo OE. EN [p] :: OA. AN. Fig. 154. * p 36. 1. hujus.

Compos. Juncta FA producatur, & sumatur FO = FN. fiátque OE. EN [q] :: OA. AN. & ordinatim applicetur ED; jungaturq; DA. [r] Tanget hæc sectionem. q *Not.* 1. r 34. 1. huj.

Sit punctum A in FM unâ asymptoton. 4 *Cas.*

Anal. Tangat AD sectionem, asymptoto FL occurrens in P; sitque DQ ad LF parallela: atque ob AD [s] = DP, [t] erit AQ = QF. Hinc Fig. 155. s 3. hujus. t 2. 6.

Compos. Bisecetur AF in Q, & per Q ducatur QD ad FL parallela, sectioni occurrens in D, jungatúrque DA. Continget hæc sectionem. Nam productâ AD in p, ob AQ [v] = QF, [x] erit AD = DP. [y] quare AD tangit sectionem. u *constr.* x 2. 6. y 9. hujus.

Punctum A sit in loco, qui deinceps est angulo LFM sectionem continenti. 5. *Cas.*

Anal. Tangat AD; junctáque AF producatur, cui parallela utcunque in sectione sumatur RS; & bisectâ RS in E, connectatur EF, & fiat FO = FN; est igitur EO diameter [z] ipsi AF conjugata; & per D ductâ DT ad EO parallelâ, erit [a] AF × FT quarta pars figuræ ad ON. Hinc Fig. 156. z 2. 37. hujus. a cor. 38. 1. huj.

Compositio. Juncta AF producatur, eíque parallela utcunque ducatur RS (sectioni occurrens punctis R, & S); bisecetur RS in E; junctâque EF producatur, & fiat FO = FN, [z] ergo ON est transversa diameter, ipsi AF conjugata. * Fiat AF × FT æqualis quartæ parti figuræ ad ON, & per T ducatur TD ad ON parallela, sectioni occurrens in D, & jungatur DA. [b] Tanget hæc sectionem. * *Not.* 2. b conv. 38. 1. huj.

Sin.

6. *Caf.* Sin affignetur punctum A intra angulum Y F Z, nulla inde tangens
c 31.1. *hujus.* duci poterit; ducta enim linea [c] utramque Y F, Z F fecabit: ergo non tanget.

Sit tertiò, fectio data ellipfis, cujus axis B C, centrum F.

1 *Caf.* Datum punctum A fit in fectione.

Anal. Tangat A D, & A E ordinatim applicetur ad axem. Eftq;
d 36.1. *hujus.* C E. E B :: [d] C D. D B.

Compof. Ducatur A E perpendicularis axi C B; & producatur
Fig. 157. C B, ut fic C E. E B [e] :: C D. D B. & connectatur D A. [f] Tanget
e *Not.* 2. hæc Ellipfin.
f 34. 1. *hujus.*

2 *Caf.* Punctum A fit extra fectionem.

Anal. Tangat A D; & juncta A F producatur, & ordinatim ap-
g 36.1. *hujus.* plicata fit D E. Eft itidem O A. A N [g] :: O E. E N.

Fig. 158. *Compof.* Connectatur A F fectioni occurens in N, O; fiátque O A.
h 10. 6. A N [h] :: O E. E N. & per E ad A O ordinatim applicetur E D, fecti-
k 34. 1. *hujus.* oni occurrens in D; & connectatur D A: [k] tanget hæc fectionem.

Fig. 159. *Not.* 1. Datur recta K B fecta in A; oportet producere hanc ad E, ita ut fit K E. B E :: K A. A B.

a 12. 6. [a] Fiat K A—A B. A B :: K B. B E. ergo componendo erit K A. A B :: K E. B E. *Q. E. F.*

Prop. L. *Probl.* 7.

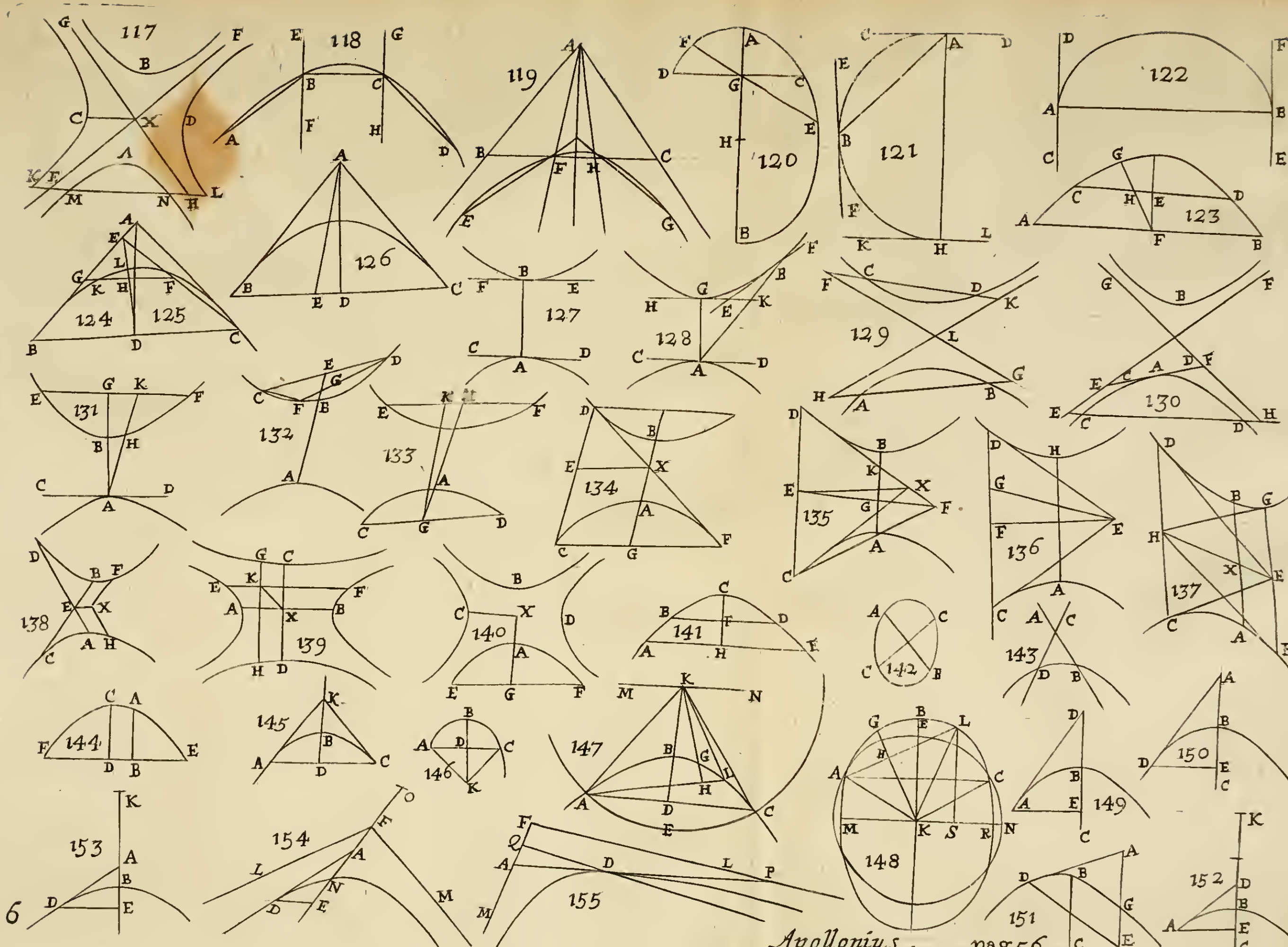
Fig. 160. Datâ coni fectione, lineam contingentem ducere, quæ cum axe ad partes fectionis angulum faciat, dato angulo acuto æqualem.

Sit fectio primùm parabole, cujus axis A B.

Fig. 161. *Analyfis.* Tangat D C fectionem, faciens angulum D parem dato
a 40. *dat.* F. Itaque ductâ C B ad A B perpendiculari, [a] datur ratio D B ad
b 33. 1 *hujus.* B C; ergo datur ratio A B [b] ($\frac{1}{2}$ D B) ad B C. [c]ergo datur angulus
c 41. *dat.* B A C. [d] quare datur pofitio rectæ A C, & inde punctum C, &
d 29. *dat.* hinc tangentis C D pofitio.

Compof. Sumpto E puncto utcunque in latere dati anguli ducatur E G ad alterum latus F G perpendicularis, & bifectâ F G in H, jungatur H E, fiátque ang. B A C = ang. G H E: & ab occurfu C du-
f 35. 1. *hujus.* catur C B ad A B perpendicularis; productâque A B, fumatur A D
g *conftr. et* 15. = A B; & connectatur D C, [f] liquet hanc tangere fectionem Et
h 4. 6. (5. quoniam F G. H G [g] :: D B. A B. & H G. G E [h] :: A B. B C (ob
k *conftr.* ang. G H E [k] = B A C, & [k] rectos ad G & B) erit ex æquo, F G.

GE.



6

Apollonius . pag. 56.

G E :: D B. B C. [l] ergo pares sunt anguli F, D. *Q. E. F.* l 6. 6.

Sit secundò Hyperbole, cujus axis A B, centrum X. Fig. 162. 163.

Anal. Tangat D C, faciens angulum parem dato K H G; jungatúrque X C, & statuatur C E axi perpendicularis; est igitur data ratio X E × E D ad E Cq [m] (eadem quæ T ad R); item [n] datur ratio E C ad E D (ob datos angulos E D C, & rectum E). [o] ergo datur ratio X E × E D ad E Dq; [p] hoc est ratio X E ad E D. Proinde [q] datur ratio X E ad E C. [r] ergo datur angulus E X C, & [s] hinc positio rectæ X C, & hinc punctum C, & hinc tangens C D. m 37. 1. *hujus.* n 40. *dat.* o 50. & 8. *dat.* p 1. 6. q 8. *dat.* r 41. *dat.* s 29. *dat.*

Quòd si ducatur asymptotos X F; [t] liquet angulum E D C majorem esse angulo A X F, quoniam D C [v] producta ipsam X F secabit. Itaque datus angulus non debet esse minor illo, qui sectionem continet. t 16. 1. v 3. *hujus.*

Compos. Sumatur G punctum utcunque in latere H G dati anguli; & à G ducatur ad H K perpendicularis G K. [y] Fiat autem T. R :: M K × K H. K Gq. & connectatur M G: dein fiat ang. A X C = ang. K M G; & ab occursu C [z] ducatur tangens C D. Dico factum. y *Not.* z 49. *hujus.* a *constr.* & 4. 6.

Ducatur enim C E axi perpendicularis: & propter X E. E C [a] :: M K. K G. ac [b] ideò XEq. E Cq :: M Kq. KGq. & E Cq. X E × ED [c] :: (R. T :: [d]) K G q. M K × K H; erit ex æquo X Eq. X E × E D. :: M Kq. M K × K H. [e] hoc est X E. E D :: M K. K H. Verùm E C. X E [f] :: K G. M K. Ergo rursus ex æquo E C. E D :: K G. K H. ergo quum anguli E, K recti sint, [g] erit ang. E D C = K H G. ergo factum. b 22. 6. c 37. 1. *hujus.* d *constr.* e 1. 6. & 11. 5. f *priùs & inversè.* g 6. 6.

Quòd verò X C sectioni occurrit, sic ostenditur: Ducatur A F ad X A perpendicularis, angulóque A X F fiat æqualis K H L. Cùm igitur sit M K × K H. K Gq (:: [h] T. R [k] ::) X Aq. A Fq [l] :: H Kq. K L q) [m] ⊏ H Kq. K Gq. [n] erit M K × H K ⊏ H Kq & proinde M Kq ⊏ MK × H K. & M Kq. K G q [o] ⊏ (M K × H K. K Gq [p] ::) X A q. A Fq. quare X Eq. E Cq ⊏ X Aq. F Aq. & X E. E C q (hoc est X A. A N) ⊏ X A. A F. [r] ergo A N ⊐ A F. quare X C secat angulum E X F; & [s] propterea sectioni occurrit. h *constr.* k 1. *hujus.* l 4. & 22. 6. m *constr.* et 8. 5. n 10. 5. o 8. 5. p *priùs.* q 4. 6. r 10. 5. s 3. *hujus.*

Sit tertiò sectio ellipsis, cujus axis A B, centrum X. Fig. 164. 165.

Analysis. Tangat C D, faciens angulum D parem dato G; jungatúrque X C, & sit C E axi perpendicularis. Est itaque data ratio C Eq ad E D × E X [a] (eadem quæ R ad T). Item ratio C Eq ad EDq [b] datur (ob datos angulos D, & E); [c] ergo datur ratio E Dq ad E D × E X. [d] hoc est ratio E D ad E X. [e] ergo ratio E X ad C E datur. [e] quare datur angulus E X C, & hinc [f] positio rectæ X C, & inde punctum C, adeóq; [g] positio tangentis C D. a 37. 1. *hujus.* b 40. *dat.* c 8. *dat.* d 1. 6. e 41. *dat.* f 29. *dat.* g 49. *hujus.*

Compos. Sumpto utcunque puncto F in latere dati anguli, ducatur FH ad GH perpendicularis; & fiat R. T :: [h] FHq. GH × HK; junctâque KF, fiat ang. AXC = HKF; & ab occursu C [k] ducatur tangens CD. Dico factum. Nam ductâ CE ad AB perpendiculari, propter XEq. ECq [l] :: KHq. HFq. & ECq. ED × XE :: [m] R. T :: [n] HFq. HG × KH. erit ex æquo XEq. ED × XE :: KHq. HG × KH. [o] hoc est XE. ED :: KH. HG. Item EC. XE :: [p] HF. HK. ergo rursus ex æquo ED. EC :: HG. HF. Unde cùm ang. E [n] = H, [q] erit quoque ang. D = G. Ergo factum.

h Not.
k 49. hujus.
l constr. & 4. & 22. 6.
m 37. 1. hujus.
n constr.
o 1. 6.
p constr. et 4. 6.
q 6. 6.

Not. Fieri debet R. T :: FHq. GH × HK. Itaque $\frac{T \times FHq}{R \times GH} =$ HK.

Compos. Fiat R. T :: FH. $Q = \frac{T \times FH.}{R}$; tum GH. Q :: FH. $HK = \frac{Q \times FH}{GH} = \frac{T \times FH \times FH.}{R \times GH}$

Prop. LI. *Probl.* 8.

Fig. 166. Datâ coni sectione lineam contingentem ducere, quæ cum diametro per tactum ducta faciat angulum dato angulo acuto (*Z*) æqualem.

In parabola facilè conficitur. [a] Tangat enim hanc utcunque CD faciens cum axe AB angulum D parem dato Z; & per tactum C ducatur CE ad AB parallela: [b] Liquet CE esse diametrum, & angulum DCE alterno CDA, [c] (hoc est dato Z) [d] æquari. *Q. E. F.*

a 50. hujus.
b cor. 46. 1. h.
c constr.
d 29. 1.

Fig. 167. 168. In hyperbola verò, cujus axis AB, centrum E.

Analysis. Tangat CD faciens angulum ECD parem dato; Trigono autem CDE circumscribatur circulus; & ductâ per C ad axem perpendiculari GCZ, per V centrum circuli ducantur VQ ad ZG, & VY ad EG parallelæ, & sit CS ad GE parallela. Estque ZG. CG [e] :: (ZG × GC. CGq [f] :: EG × GD. CGq [g] ::) T. R. ergo dividendo MC. CG :: T—R. R. & bipartiendo antecedentes [h] YC. CG. [k] (hoc est VS. SQ) :: $\frac{T—R.}{2}$ R. Hinc

e 1. 6.
f 36. 3. & 7. 5.
g 37. 1. hujus.
h 3. 3.
k 34. 1.

Compos. Exponatur utcunque recta FH, super quâ [l] describatur segmentum circuli capiens angulum (ut FKH) parem dato Z. A circuli autem centro N ducatur NO ad FH perpendicularis, [m] seceturque

l 33. 3.
m 10. 6.

túrque N O in P, ut sit NP. PO :: $\frac{T-R}{2}$. R. ducatúrque P K ad FH parallela, circulum secans in K, & per K ducatur K L ad protractam F H perpendicularis; & producatur L K M, & perpendicularis huic ducatur N X. Junctâ denique K F, fiat ang. AEC = ang. LFK; & per occursum C [n] ducatur sectionem contingens C D. Dico factum. n 49 *hujus.*

Ducatur axi perpendicularis C G; & quoniam $\frac{T-R}{2}$. R. [o] :: NP. PO (XK. KL) erit (duplando antecedentes) T—R. R :: MK. KL. & componendo T. R :: ML. KL :: [p] ML × KL. [q] (FL × HL). KLq :: T. R :: [r] EG × DG. CGq. Est ergo FL. KL ⊣⊢ HL. KL [s] (FL × HL. KLq) = EG. CG ⊣⊢ DG. CG (EG × DG. CGq). atqui (ob [t] similia trigona FLK, EGC) [v] est FL. KL = EG. CG. ergo HL. KL :: DG. CG. [x] ergo anguli HKL, DCG pares sunt, & [y] proinde reliqui FKH, ECD etiam pares sunt. *Q.E.D.*

o *constr.* p 1. 6. q 36. 3. r 37. 1. *hujus.* s 23. 6. t *constr.* u 4. 6. x 6. 6. y 3. *ax.* 1. z 1. *hujus.*

Quòd verò E C sectioni occurrat, sic ostenditur; sit E T asymptotos, & axi A B ducatur perpendicularis A T. Estque EAq. ATq [z] :: (T. R :: [a] FL × LH. LKq) [b] ⊐ FLq. KLq, [c] vel EGq. CGq. ergo ang. AET ⊏ ang. AEC; [d] & proinde E C sectionem secat.

a *constr.* b 8. 5. c *prius.* d 2. *hujus.*

Coroll. Si sit FL × HL. KLq :: EG × DG. CGq. erunt trigona HLK, DGC similia.

Prop. LII.

Si ellipsim (cujus Axes A B, C D, & Centrum E) recta linea (GL) contingat; angulus (LFE), quem facit cum diametro (EF) per tactum (F) ducta, non est minor angulo (LCA) deinceps ei (ACB), qui lineis (AC, BC) ad mediam sectionem (C) inclinatis continetur. Fig. 169. 170. 171.

Sit primò E F ad B C parallela: ergo cùm sit A E [a] = E B, [b] erit A H = H C ergo, cùm E F [c] sit diameter, [d] erit A C tangenti G L parallela: unde ang. L F H [e] = (C H E [e] =) L C H.

Sed non sit E F ad B C parallela: ergo ductâ F K ad A B perpendiculari [f] erunt anguli L B E, F E K inæquales, & trigona C B E, F E K dissimilia. Non igitur est E Kq. K Fq :: (B Eq. (A E × E B). E Cq. [f] hoc est T. R; [g] hoc est) G K × K E. K Fq. ergo E Kq, & G K × K E sunt inæqualia, & proinde G K, K E inæquales sunt. [h] Capiat circuli segmentum M Y N angulum parem angulo A C B: [k] ergo id semicirculo majus est (nam ob A E, vel B E [l] ⊏ E C, [m] est uterque angulus A C E,

a *hyp.* b 2. 6. c *cor.* 47. 1. *huj.* d 5. *hujus.* e 29. 1. f *cor. ad def. ad* 16. 1. *huj.* g 37. 1. *hujus.* h 33. 3. k 31. 3. l *hyp.* m 18. 1. & 32. 1.

n 10. 6. A C E, B C E semirecto major, ideóque ang. A C B obtusus). [n] Fiat
N X. X M :: G K. K E & per X ducatur ipsi M N perpendicularis
Y X, & connectantur M Y, N Y; bisectâque M N in T, erigatur ei
perpendicularis O T P, in qua sumpto circuli centro R, ducatur R S ad
Y X perpendicularis; junganturque M O, N O: liquet ang. N O T[o]
($\frac{1}{2}$ N O M) angulo B C E [o] ($\frac{1}{2}$ B C A) æquari; ideóque esse T Nq.
o 4. 1. T Oq [p] :: E Bq. E Cq. Est verò Y S. Γ R q (X S) [r] ⊐ O R. T R. &
p 4. & 22. 6. conversè S Y. X Y ⊏ R O. T O. & duplando antecedentes Z Y. X Y.
q 34. 1. ⊏ P O. T O. & dividendo Z X. X Y. ([o] hoc est Z X × X Y [p] (vel
r 8. 5. N X × X M). X Y q) ⊏ (P Γ. T O q :: T Nq. T Oq [r] :: E Bq. E Cq
o 1. 6. r ::) G K × K E. K Fq. Itaque si fiat N X × X M. X Vq :: G K × KE.
p 35. 3. (6. K Fq, [s] erit X V ⊏ X Y. Et quoniam N Xq. N X × X M [t] :: (N X.
q cor. 13. & 20. X M [v] :: G K. K E [t] ::) G Kq. G K × K E. erit ex æquo NXq. XVq
r prius. :: G Kq. K Fq. [x] & N X. X V :: G K. K F; connexâ igitur N V, [y] e-
s 10. 5. rit ang. N V X = ang. G F K. & simili discursu ang. M V X =
t 1. 6. E F K [z] unde totus ang. N V M = G F E. atqui ang. N V M [a] ⊐
u constr. N Y M (A C B). ergo ang. G F E ⊐ A C B, & qui deinceps ang.
x 22. 6. E F L ⊏ L C A. *Q. E. D.*
y 6. 6.
z 2. ax. 1.
a 21. 1.

Prop. LIII. Probl. 9.

Fig. 172. Datâ ellipsi (A B C D) contingentem lineam ducere, quæ cum
173. diametro per tactum ducta faciat angulum dato angulo
174. * juxta præ- acuto (Y) æqualem. * Oportet autem acutum angulum
175. cedentem. datum non esse minorem angulo (A C G) deinceps ei
(A C B), qui lineis (A C, B C) ad mediam sectionem
inclinatis continetur.

Sit primò datus ang. Y = A C G per centrum E ducatur E K ad
B C parallela; & per occursum K sectionem contingens G H. Dico
factum.

a hyp. Nam ob A E [a] = E B, [b] erit A F = F C: ergo cùm K E sit diameter,
b 2. 6. [c] erit A C tangenti H G parallela. ergo ang. E K G [d] = (E F C [d] =
c 5. hujus. A C G = [e]) Y. *Q. E. F.*
d 29. 1.
e hyp. Sin. ang. Y ⊏ A C G, erit qui deinceps Z ⊐ A C B. Exponatur
f 33. 3. utcunque circulus, [f] in quo segmentum M N P capiat angulum parem
g cor. 1. 3. angulo Z; bisectâque M P in O, ducatur per O ipsi M P perpendi-
h 4. 1. cularis N R [g] (in quo circuli centrum V), & connectantur M N, PN.
k constr. Itaque ang. ACE [h] ($\frac{1}{2}$ ACB) ⊏ ang. MNO [h] ($\frac{1}{2}$ MNP, [k] vel $\frac{1}{2}$ Z). quare
l cor. ad defin. ad 16. 1. huj. AE. EC ⊏ MO. O N. & AEq. ECq. [p] (T. R) ⊏ (MOq. [q] (NO × OR).
q 35. 3. ONq [r] ::) OR. ON. ergo componendo T + R. R ⊏ RN. ON. & biparti-
r 1. 6.
endo

endo antecedentes $\frac{T+R}{2}$. R ⊏ V N . O N. dividendóque $\frac{T-R}{2}$.

R ⊏ V O . O N. Sit $\frac{T-R}{2}$. R :: V O . O I s (⊐ O N). & per I s 10. 5.

ducatur I X ad M P parallela, & per X ipsa X S T ad N R parallela,

& V Q ad M P parallela. ergo cùm $\frac{T-R}{2}$. R t :: (V O . O I u ::) t *constr.* (5. v 34. 1. & 11.

Q S . S X. erit componendo $\frac{T+R}{2}$. R :: Q X , S X. & duplando

antecedentes, T + R. R :: T X . S X. & dividendo T . R :: T S. S X. Connectantur igitur M X. P X, & fiat ang. A E K = ang. M P X. & per occursum K ducatur G H tangens sectionem. Dico factum. Nam x 21. 3. ordinatim applicetur K L. éstque H L × L E. K Lq x :: (T. R y :: T S. y *priùs.* S X z ::) T S × S X a (M S × S P) . S X q. b ergo H L . K L + L E. z 1. 6. a 35. 3. K L b (H L × L E. K Lq = M S × S P. S X q c =) M S. S X + S P. b 23. 3. S X. atqui (d ob ang. A E K = M P X, & rectos ad L, & S) e est L E. c 23. 6. K L :: S P. X S. ergo manet H L. K L :: M S. X S. ergo ang. HKL = d *constr.* M X S. ergo totus ang. H K E f = (ang. M X P g =) ang. Z. & qui e 4. 6. deinceps ang. E K G = ang. Y. Ergo factum. f 2. *ax.* 1. g *constr.*

Coroll. Si H L × L E. K Lq :: M S × S P. X S q. Erit trigonum H L K simile trigono M S X.

Problema.

Linea E F coni sectionem secet, oportet huic parallelam ducere, Fig. 176. quæ sectionem contingat. Bisecetur E F in C; & per C ducatur diameter sectioni occurrens in T; & per T ducatur T S ad E F parallela, hæc sectionem continget. Res liquidò patet.

APOL-

APOLLONII
CONICORUM
LIB. III.

Prop. I.

Fig. 177. 178. 179. 180. SI coni sectionem, vel circuli circumferentiam contingentes rectæ lineæ (A C, B D) inter se conveniant (in E), pérque tactus (A, B) ducantur diametri (A D, B C), quæ contingentibus occurrant (in D, C); triangula (A E D, B E C) ad verticem facta, sibi ipsis æqualia erunt.

Per A ducatur A F ad B D parallela. Estque (in parabola) *p g r.*

a 42. 1. *hujus.* A D B F [a] = triang. A C F: ablatóque communi trapezio A E B F,

b 37.1. *hujus.* restat triang. A E D = triang. B E C. *Q. E. D.*

c 1. 6.

d *cor.* 20. 6. In aliis verò sectionibus (ob G F . G B [b] :: G B. G C) [d] est G F.

e 1, & 22. 6. G C. ([c]hoc est triang. G F A. G C A) [d] :: (G Fq. G Bq [e] ::) triang.

f 9. 5. G F A. G B D. [f] quare triang. G C A = G B D. & proinde (ablato vel addito communi quadrilatero) remanet triang. A E D = triang. BEC. *Q.E.D.* *Coroll.* Triang. G C A = triang. G B D.

Prop. II.

Fig. 181. 182. 183. 184. 185. 186. Iisdem positis, si in coni sectione, vel circuli circumferentia, sumatur aliquod punctum (G), & per ipsum ducantur (K G L, F G M) æquidistantes contingentibus usque ad diametros; quadrilaterum (G L G I) factum ad (A C) unam contingentium, & ad (B C) unam diametrorum, æquale erit triangulo (A I M), quod ad eandem contingentem (A C) & ad alteram diametrum (AD) constituitur.

Nam

Nam ob triangulum G K M [a] æquale quadrilatero A K L C, liquet (addito vel ablato communi A I G K) tota, vel residua A I M, G I C L æquari. a 42, *vel* 43. I. *hujus*.

Prop. III.

Iisdem positis, si in coni sectione, vel circuli circumferentia, sumantur duo puncta (F, G) & per ipsa ducantur (F H K L, N F I M, & G H P R, N G X O) æquidistantes contingentibus, usque ad diametros, quadrilatera ((L G, R F, & L N, R N) quæ ab ipsis fiunt, in diametris constituta, inter se æqualia erunt. Fig. 187. 188. 189.

Nam quadrilat. G O L H + 4lat. H L C P [a] = 4lat. G O C P [b] = triang. A R P = [a] 4lat. M I P R + triang. A I M [c] (hoc est = 4lat. M I P R + 4lat. F L C I [d] =) 4lat. M F H R + 4lat. HLCP. [e] ergo 4lat. G O L H = 4lat. M F H R. & [f] proinde etiam quadrilat. N O L F = quadrilat. N M R G. *Q. E. D.*

a 19. *ax.* I.
b 2. 3. *hujus*.
c 2. *ax.* I. & 2. 3. *hujus*.
d 2, & 3. *ax.* I.
e 3. *ax.* I.
f 2. *ax.* I.

Prop. IV.

Si quæ oppositas sectiones contingunt duæ rectæ lineæ (A C, B C) inter se conveniant (in C), & per tactus (A, B) ducantur diametri (A D H, B D G) contingentibus occurrentes (in F, G); triangula (A C F, B C G), quæ ad contingentes constituuntur, sibi ipsis æqualia erunt. Fig. 190.

Per H ducatur tangens H L. [a] Hæc tangenti A G parallela erit; [b] & A D = H D. quare triang. A G D. [c] = (triang. H L D [d] =) triang. B F D. Proinde (addito communi G D F C) erit triang. A C F = triang. B C G. *Q. E. D.*

a *cor.* 44. *hujus*.
b 30. I. *hujus*.
c 4. 6. & 8. I.
d I. 3. *hujus*.

Prop. V.

Si, quæ oppositas sectiones contingunt, duæ rectæ (E D, F D) sibi ipsis occurrant (in D), & in sectionum quavis (B) sumatur aliquod punctum (G), à quo ducantur duæ lineæ, una quidem G M æquidistans contingenti (F D), altera verò (G K H L) æquidistans ei (F E), quæ tactus (E, F) conjungit, triangulum (G H M), quod ab ipsis constituitur ad diametrum (C D) per occursum ductæ, à triangulo (K H D), quod est ad occursum contingentium, differt triangulo (F K L) facto ad contingentes, & ad diametrum (F C), quæ per tactum (F) ducta fuerit. Fig. 191.

Nam

a 29. & 38. 2. h. Nam ob [a]diametrum C D, & ordinatim applicatam F E, [b]atque
b hyp. G L, G M ipsis F E, F D parallelas, [c]liquet esse triang. M G H =
c 45. 1. hujus. triang. C H L + C D F = triang. K H D + F K L.

Coroll. Triang. K F L = quadrilat. M G K D.

Prop. VI.

Fig. 192. 193. Iisdem positis, si in una oppositarum sectionum sumatur aliquod punctum (K), & ab eo ducantur rectæ lineæ (K L M, K N X) contingentibus (A F, B G) æquidistantes, quæ & contingentibus (A F, B G), & diametris (A E C, B E D) occurrant; quadrilaterum (K E) ab ipsis factum ad unam contingentium (A F), & ad unam diametrorum (B D) æquale erit triangulo (A I N) quod ad eandem contingentem, & ad alteram diametrum (A C) constituitur.

a 2. 3. hujus. Nam (in 1. fig.) triang. K O N [a]= 4lat. A O M F. unde (addito
communi A I K O) triang. A I N = 4lat. K F. Item (in 2 fig.) ductâ
b 2. 3. hujus. contingente C O P; [b]erit triang. C O N = 4lat. K P. additóque
c 4. 3. hujus. communi O E, triang. C P E ([c]hoc est triang. B G E, [d]hoc est triang.
d 1. 3. hujus. A F E) [e]= 4lat. K E. quare itidem addito communi E I, [e]erit tri-
e 2. ax. 1. ang. A I N = 4lat. K F. *Q. E. D.*

Cor. Triang. A F E = 4lat. K E.

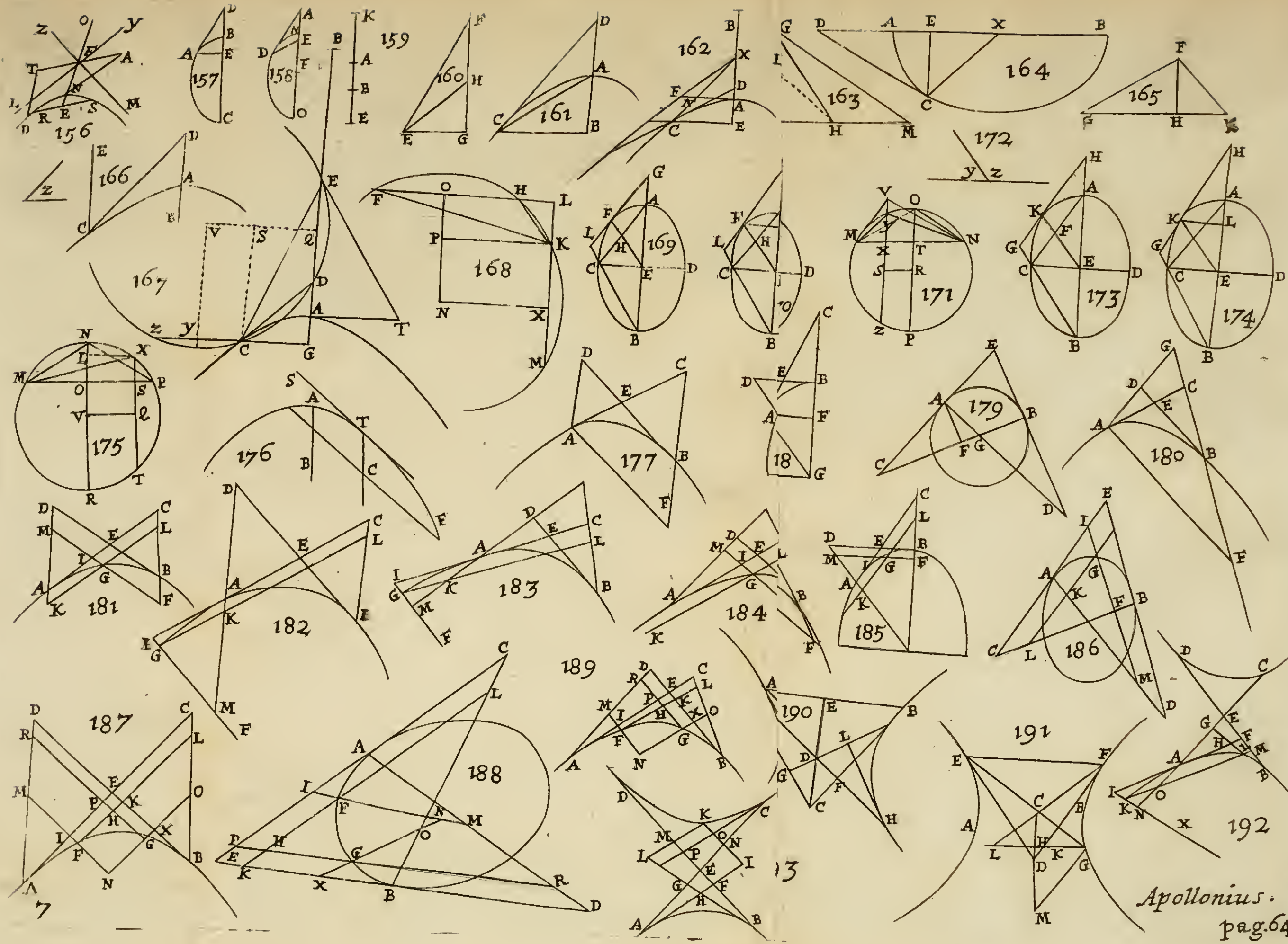
Prop. VII.

Fig. 194. Iisdem positis, si in utraque sectione (A B, C D) sumantur aliqua puncta (K, L), & ab ipsis ducantur contingentibus æquidistantes (M K P R X, N S T L W), quæ & contingentibus & diametris occurrant, quadrilatera (K T, L E, & K Y, L R) à lineis ductis constituta ad diametros, inter se æqualia erunt.

a 2. hujus. Nam ob quadrilat. K R F O [a] = triang. A O I, erit 4lat. K R E I
b 2. ax. 1. [b]= (triang. A E F [c]=) 4lat. L E. [b]unde 4lat. K R T N = 4lat. L I;
c cor. 6. hujus. [b]& 4lat. K X Y O = L R. Quæ *E. D.*

Prop. VIII.

Fig. 195. Iisdem positis, pro punctis K, L sumantur C, D, in quibus diametri (AC, B D) cum sectionibus conveniant, & per ipsa ducantur contingentibus æquidistantes (D X, C T); dico quadrilaterum D C quadrilatero


156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
171
172
173
174
175
176
177
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192

drilatero F C, & quadrilaterum X I quadrilatero T O æquale esse.

Nam ob trigona A E F, B E G [a] æqualia, [b] erit A E. E G :: B E. E F; & [c] conversè, A E. A G :: B E. B F. item A C. A E :: ([d] 2. 1 [d] ::) B D. B E. ergo ex æquali A C. A G :: B D. B F. ergo [e] triang. A C T. A G H :: triang. B D X. B F H. atqui triang. A G H [f] = B F H. ergo triang. A C T [g] = B D X: [h] quare 4lat. C H = 4lat. D H. & 4lat. C F = 4lat. D G. Adhæc triang. C E O [k] = triang A E F [l] = triang. B E G [k] = triang. D E I. [m] ergo 4lat X I = T O. Quæ *E.* D.

a 1. *hujus.*
b 15. 6.
c *cor.* 19. 5.
d 30. 1.
e 22. 6.
f 1. *hujus.*
g 14. 5.
h 3. *ax.* 1.
k 8. 1.
l *cor.* 1. *hujus.*
m 2. *ax.* 1.

Prop. IX.

Iisdem positis, si alterum quidem punctum, ut K, sit inter diametros, alterum vero sit idem quod unum punctorum C, D, ut C; & ducantur æquidistantes; dico triangulum C E O æquale esse quadrilatero K E, & quadrilaterum L O ipsi L M æquale esse. Fig. 196.

Nam triang. C E O [a] = (triang. A E F [b] =) 4lat K E. [c] ergo triang C R M = 4lat. K O. & 4lat. L M = 4lat. L O.

a 4. *hujus.*
b *cor.* 6. *huj.*
c 3. *ax.* 1.

Prop. X.

Iisdem positis sumantur K, L, non tamen in punctis, in quibus diametri sectionibus occurrunt, demonstrandum est quadrilaterum L T R X quadrilatero ω X K I æquale esse. Fig. 197.

Nam triang. T Y E — Y ω L [a] = (triang. B E G [b] = triang. A E F [a] =) triang X E I — X R K. [c] ergo triang. T Y E + X R K = triang. X E I + Y ω L. additóque utrinque spatio K X E Y L χ, [c] erit 4lat. L T R χ = ω χ K I. *Q. E. D.*

a 43. 1. *hujus.*
b 1. *hujus.*
c 1. *ax.* 1.

Prop. XI.

Iisdem positis, si in quavis sectione (A B) sumatur punctum B, & ab ipso lineæ æquidistantes ducantur; una quidem (B M) contingenti (A E) æquidistans, altera verò (B L) æquidistans ei (A D) quæ tactus conjungit; triangulum (B F M) quod ab ipsis fit ad diametrum (G M) per occursum (E) contingentium ductam, à triangulo (A K L) contento lineâ contingente (A K) & diametro (A H L) per tactum, differt triangulo (K E F), quod ad contingentium occursum constituitur. Fig. 198.

a 45. 1 *hujus.* b 19. *ax.* 1. c 3. *ax.* 1.

Nam triang. B M F[a] = (triang. L H F + triang. H A E[b] =) triang. A K L + triang. K F E.

Cor. 4 lat. B K E M[c] = triang. A K L.

Prop. XII.

Fig. 199.

Iisdem positis, si in una sectione (AB) sumantur duo puncta (B, K), & ab utrisque similiter ducantur æquidistantes (B L M N, K O X P ad A D; & B X K, K L S ad B E); quadrilatera (B P, K R) ab ipsis constituta, æqualia erunt.

a cor. 11. *huj.* b 3. *ax.* 1. c 2. *ax.* 1.

Nam quia triang. A O P[a] = 4lat K O E S; & triang. A M N[a] = 4lat B M E R; [b] erit 4 lat. M O P N (= triang A O P — triang. A M N)[b] = (4lat K O E S — 4lat B M E R[b] =) 4lat K X R S — 4lat B M O X. [c] unde 4lat K X R S = (4lat M O P N + 4lat B M O X =) 4lat B X P N. *Q. E. D.*

Prop. XIII.

Fig. 200.

Si in oppositis sectionibus (A, B, C, D), quæ conjugatæ appellantur, rectæ lineæ (A F, B E) contingentes sectiones (A, B), quæ deinceps sunt, in unum punctum (E) conveniant, & per tactus (A, B) ducantur diametri (A H C, B H D); triangulâ (B F H, A G H), quorum communis vertex est sectionum centrum (H), inter se æquales erunt.

a 20. 2. *hujus.* b 4. 6. c 38. 1. *hujus.* d *Not.* e 12. 6. f 11. 5. g 9. 5. h 1. 6. k 15. 6.

Per puncta A, & H ducantur A K, L H M ad B E parallelæ; [a] liquetque esse L M, D B diametros conjugatas. Itaque K H. H B [b] (hoc est A H. H F) [c] :: H B. H G. [d] ergo triang. A G H [d] = triang. BHF. *Q. E. D.*

Not. [a] Sit H X. H F :: (H B. H G [f] :: A H. H F) [g] ergo H X = A H. & ideo triang. A E H [h] = triang. H G X [k] = triang. B H F.

Prop. XIV.

Fig. 201.

Iisdem positis, si in quavis sectione (B) sumatur punctum (X), & ab ipso ducantur lineæ (X R S, X O T) æquidistantes contingentibus usque ad diametros (B H D, A H C); triangulum (O H T), quod ad centrum (H) constituitur, à triangulo (X T S) circa eundem angulum (T) differt triangulo (H B F, vel A G H) basin habenti lineam contingentem (B F, vel A G) & verticem sectionum centrum (H).

ducatur

Ducatur A Y ad B F parallela; & propter [a] conjugatas diametros L M, D B; & huic ordinatim applicatam A Y, [b] erit A Y. YG [c] (hoc est X T. T S) = HY. Y A [c] (H B. B F) + T. R. [d] quare triang. O H T = (triang. X T S + triang. B F H. [e] =) triang. X T S + triang A G H. *Q. E. D.* a 20. 2 *hujus.* b 40. 1 *hujus.* c 4. 6. d 41. 1. *hujus.* e 13. *hujus.* & 1. *ax.*

Prop. XV.

Si oppositarum sectionum (A B, G S, T, X) quæ conjugatæ appellantur, unam (A B) contingentes rectæ lineæ (A D E, B D C) conveniant (in D), & per tactus (A, B) ducantur diametri (A H F, B H T); sumatur autem punctum (S) in quavis (G S) sectionum conjugatarum, & ab ipso ducantur contingentibus æquidistantes (S L, S Y) usque ad diametros (B T, A F) triangulum (S L Y), quod ab ipsis ad sectionem constituitur, majus est quàm triangulum (H L F), quod ad centrum (H), triangulo (H C B) basin habenti lineam contingentem (B C) & verticem (H) centrum sectionum. Fig. 202. 203.

Ducantur X H G ad B C, & G I K ad A E, & S O ad B T parallelæ. Fiántque D B. B E [a] :: M N. 2 B C [b] :: M P ($\frac{1}{2}$ M N). BC. [c] atque X G. T B :: T B. R. Liquet X G, B T [d] fore conjugatas diametros; & S O (vel L H) [e] ordinatim applicari ad X G, & [f] M N fore rectum latus figuræ ad B T, [g] & R rectum latus figuræ ad XG. Porro D Bq. D B × B E [b] :: (D B. B E [k] :: M P. B C [h] ::) M P × B H. [l] (H Gq). B C × B H. permutandóque D Bq. H Gq [m] (hoc est triang. D B E. triang. GHI) :: DB × BE. BC × BH [n] :: triang. DBE. triang C B H. unde triang. G H I [o] = triang. C B H. Atqui H L. L F. [p] :: (H B. B C [q] :: H B. M P [r] (R. X G) + M P. B C [s] (D B. B E vel G H. H I) =) R. XG + GH. HI [t] = HL. LF. [v] unde triang. S L Y = (triang. H L F + triang. H G I [x] =) triang. H L F + triang. C B H. *Q. E. D.*

Not. D B × B E. B C × B H :: triang. D B E. triang. C B H. Nam ducantur C V, D Q ad B H perpendiculares. Estque D Q × B E. DB × B E [a] :: (D Q. D B [b] :: C V. C B [a] ::) C V × B H. C B × B H. & permutando D Q × B E [c] (hoc est 2 triang. D B E). C V × B H [c] (2 triang. C B H) :: D B × B E. C B × B H [d] :: triang. D B E. triang. C B H.

a 12. 6.
b 15. 5.
c 11. 6.
d 20. 2. *hujus.*
e 47. 1. *hujus.*
f 51. 1. *hujus.*
g 4. *def.* ad 16. 1. *hujus.*
h 1. 6.
k *constr.* (6. *prius.* & 17.
l
m 22. 6.
n *Not.*
o 9. 5.
p 4. 6.
q 5. *def.* 6.
r *cor.* 20. 2 *hujus.* & 15. 5.
s *constr.*
t 11. 5.
u 41. 1. *hujus.*
x 2. *ax.*
a 1. 6.
b 4. 6.
c 41. 1.
d 11, & 15. 5.

 Prop.

Prop. XVI.

Fig. 204. 205. Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam contingentes duæ rectæ lineæ (AC, B C) in unum conveniant (in C); & ab aliquo puncto (D) eorum, quæ sunt in sectione, ducatur linea (DF) uni (B C) contingentium æquidistans, quæ & sectionem, & alteram (AC) contingentium secet (in E, & F); ut quadrata contingentium (B C, A C) inter sese, ita erit rectangulum contentum lineis (F E, E D) quæ interjiciuntur inter sectionem & contingentem, ad quadratum lineæ (A E) inter æquidistantem (F E) & tactum (A) interjectæ.

a 46. & 47. 1. b 6. 2. (huj. c 1. hujus. d 16. 5. & 22. 6. e 19. 5. f prius. g 2. hujus. h 22. 6.

Per A, B ducantur diametri A G H, K B L; & D N ad A C parallela. [a] Liquet esse F K = K D. [b] unde F E × E D + D Kq = EKq. Item C Bq. triang C B L [c] (triang C A H) [d] :: E Kq triang. E K L [d] :: D Kq. triang D K N [e] :: E K q — D Kq. triang E K L — triang D K N (hoc est [f] ::) F E × E D. 4lat D L ([g] = triang AEG). ergo permutatim C Bq. F E × E D :: (triang C A H. triang A E G [h] ::) C Aq A Eq. vel iterum permutando C Bq. C Aq :: F E × E D. AEq. *Q. E. D.*

Coroll. 1. F E × E D. C Bq :: A Eq. A Cq.

2. $\left\{ \begin{array}{l} \text{D Bq. triang. D K N ::} \\ \text{C Bq. triang. C B L ::} \end{array} \right\}$ F E × E D. 4lat. D L.

Prop. XVII.

Fig. 207. 208. Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam contingentes duæ rectæ lineæ (A C, B C) in unum conveniant (in C); sumantur autem in sectione duo quævis puncta (D, E), & ab iis ducantur lineæ (EFIK, D F G H) contingentibus æquidistantes), quæ & sibi ipsis, & * lineæ occurrant; ut quadrata contingentium (A C, B C) inter sese, ita erit rectangulum contentum lineis (K F, F E), quæ interjiciuntur inter sectionem, & linearum occursum (F), ad rectangulum quod lineis (HF, FD) similiter sumptis continetur.

* sectioni.

* Cor. 2. præc. a 3. hujus. b 16. 5. & 22. 6. c 1. hujus.

Per A, B ducantur diametri A M L N, B X O P, & D X, E M tangentibus parallelæ. Estque K F × F E. 4lat F M [a] (vel 4lat. F X) * :: (E I q. triang E I M [b] ::) A Cq. triang A C N [c] (vel triang B C P). Similique discursu, H F × F E. 4lat F X :: C Bq. triang B C P. & inversè 4lat F X. H F × F E :: triang. B C P. C Bq.

ergo

ergo ex æquali KF × FE. HF × FE :: ACq. CBq. *Q. E. D.* Fig. 209.

Si punctum F intra sectionem cadat, similis est discursus, nisi quod *pro.* 6. 2. adhiberi debeat 5. 2 *Elem.* (in præcedenti.)

Prop. XVIII.

Si oppositas sectiones (AB, MN) contingentes duæ rectæ lineæ (ACLE, BCH) inter se conveniant (in C); sumatur autem in quavis sectione (MN) aliquod punctum (D), & ab eo ducatur linea (DFGE) uni contingentium (BC) æquidistans, quæ & sectionem, & alteram contingentium secet in (F, & E): ut quadrata contingentium (BC, CA) inter sese, ita erit rectangulum contentum lineis (FE, ED), quæ interjiciuntur inter sectionem & contingentem (AE) ad quadratum lineæ (AE) inter æquidistantem (FE), & tactum (A) interjectæ. Fig. 210.

Ducatur DX ad AE parallela. Estque FE × ED + DOq [a] = OEq. ac BCq. triang BCL [c] (vel triang ACH) [b] :: (OEq. triang, OEL [b] :: DOq. triang DOX [d] :: FE × ED. 4lat. DL [e] (vel triang. AEG). itemque triang. ACH. ACq [b] :: triang. AEG. AEq. Ergo ex æquali BCq. ACq :: FE × ED. AEq. *Q. E. D.*

a 48. 1. *huj.* & 6. 2.
b 16. 5. *et* 22. 6
c 1. *hujus.*
d 19. 5.
e 6. *hujus.*

Prop. XIX.

Si quæ oppositas sectiones contingunt duæ rectæ (AF, DF) in unum conveniant (in F), & ducantur contingentibus æquidistantes, (GHIKL, MNXOL) quæ & sibi ipsis & sectioni occurrant; ut quadrata contingentium (AF, FD) inter sese, ita erit rectangulum contentum lineis (GI, LI) quæ interjiciuntur inter sectionem, & linearum occursum, ad rectangulum, quod lineis (ML, LX) similiter sumptis continetur. Fig. 211.

Sint HAEC, NDEB diametri, & XR, IP tangentibus AF, DF parallelæ. Estque AFq. triang AFS [a] (vel triang DFT) [b] :: (HLq. triang HLO [b] :: HIq. triang HIP [c] ::) GL × LI. 4lat TO [d] (vel 4lat KX). itemque triang DFT. DFq [c] :: 4lat KX. ML × LX. ergo ex æquo AFq. DFq :: GL × LI. ML × LX. *Q. E. D.*

a 4. *hujus.*
b 16. 5. *et* 22. 6
c 2 *cor.* 16. *huj.*
d 7. *hujus.*

Prop. XX.

Si quæ oppositas sectiones (AB, CD) contingunt duæ rectæ lineæ (AF, CF) sibi invicem occurrant; & per occursum (F) ducatur li- Fig. 212.

nea

nea (B F H D) tactus conjungenti (A C) æquidistans, quæ secet utramque sectionem (in B D); ducatur autem alia linea (G L S M N X) æquidistans eidem, sectionésque & contingentes secans: erit ut rectangulum contentum lineis (B F, F D), quæ inter occursum sectionum, & sectones interjiciuntur, ad quadratum lineæ contingentis (A F), ita rectangulum, quod continetur lineis (G L, L X) intersectiones, & contingentem interjectis, ad quadratum lineæ (A L) ad tactum abscissæ.

a 38. *et*. 39 2. *hujus*. Sint A E H, E F diametri; ducantúrque G P, B R ad A E paral-
lelæ. Estque B Fq. [a] (BF × F D). triang B F R [b] (triang A F H)
b 45. 1. *hujus*. [c] :: L Sq. triang L S H [d] :: G L × L X. 4lat G L F P [e] (triang ALN).
c 16. 3. & 22. (6. Item triang A F H. A Fq [c] :: triang A L N. A Lq. ergo ex æquo
d 19. 5. e 5. *hujus*. B F × F D. A Fq :: G L × L X. A Lq. *Q. E. D.*

Coroll. Triang. B F R. B F × F D :: 4lat G L F P. GL × L X.

Prop. XXI.

Fig. 213. Iisdem positis, si in sectione sumantur duo puncta (G, K), & per ipsa ducantur rectæ lineæ; una quidem (N X G O P, vel K S T) contingenti (A F) æquidistans; altera verò (G L M, vel K O V χ Ψ ω) lineæ (A C) tactus conjungenti æquidistans; quæ & sibi ipsis, & sectionibus occurrant: Erit ut rectangulum contentum lineis (B F, FD), quæ interjiciuntur inter occursum contingentium, & sectiones, ad quadratum contingentis (A F); ita rectangulum contentum lineis (K O, O ω) inter sectiones, & linearum occursum interjectis, ad rectangulum, quod lineis (N O, O G) similiter sumptis continetur.

a 41. 1. *buj*. Nam A F q. triang A F H [a] (triang B Y F) [b] :: X O q. triang.
b 46. 5. *et* 22. 6 X O Ψ [b] :: X G q triang X G M [c] :: N O × O G. 4lat G O Ψ M
c *cor*. 16. *buj*. [d] (4lat K O R T). [e] Item triang. B Y F. B F × F D :: [e] 4lat KORT.
d 12. *bujus*. e *cor. præced*. K O × O ω. ergo ex æquali A F q. B F × F D :: N O × O G. K O ×
O ω. atque inversè.

Prop. XXII.

Fig. 214. Si oppositas sectiones (A, B) contingant duæ rectæ lineæ (A C, B D) inter se æquidistantes; ducantur autem aliæ lineæ, quæ & sibi ipsis, & sectionibus occurrant (una quidem K E M) contingentibus æquidistans, altera verò (G X E) æquidistans ei (A B), quæ tactus conjungit: erit ut transversum latus ad rectum figuræ, quæ ad lineam (A B) tactus conjungentem constituitur; ita rectangulum contentum

lineis

lineis (G E, X E) inter sectionem, & linearum occursum interjectis, ad rectangulum, quod lineis (K E, E M) similiter sumptis continetur.

Ducantur G F, X N ad A C parallelæ: hæ (& parallela his K M) ad [a] diametrum A B ordinatim applicantur: quare B L × L A. K L q [b] ::(A B. R [b]:: B N × N A [c] (FA × NA). X Nq. [d] :: B L × L A—FA × N A. K Lq—X Nq(—E L q) (hoc est) [e] :: F L × LN. [f] K E × E M. atqui F L × L N [g] = G E × E X. [h] ergo A B. R:: G E × E X. K E × E M. *Q. E. D.*

Not. [e] Quod F L × L N = B L × L A — F A × N A sic patet. Bisecetur B A, vel F N in Z. Estque B L × L A + Z A q [k] = (Z L q [k] = F L × L N + Z Nq [l] =) F L × L N + F A × A N + Z A q (nam Z Nq [k] = B N × A N + Z Aq). ergo B L × L A = F L × L N + F A × A N.

a 31.2. *hujus.* b 21.1. *hujus.* c *cor.* 16.1. *huj.* d 19.5. e *Not.* f 5.2. g 34. & *sch.* 48.1. h 7, & 11.5. k 2.6. l 2. *ax.* 1.

Prop. XXIII.

Si in oppositis sectionibus (A B, C D, E F, G H), quæ conjugatæ appellantur, duæ rectæ lineæ (A L, E L), contingentes oppositas sectiones (A B, E F) conveniant in quavis sectione (in L); ducantur autem aliquæ lineæ (GO, HS) æquidistantes contingentibus (AL, EL); quæ & sibi ipsis, & aliis sectionibus (C D, G H) occurrant: ut quadrata contingentium (A L, E L) inter sese, ita erit rectangulum contentum lineis (G X, X O) quæ inter sectiones, & occursum (X) interjiciuntur ad rectangulum, quod lineis (H X, X S) similiter sumptis continetur. Fig. 215.

Ducantur S T ad A L, & O Y ad E L parallelæ. Estque H P* = P S, & G M* = M O; ac E Lq. triang E V L. [a] (triang. A L χ) [b]:: P X q triang P N X [c]:: H X × H S. 4lat T N X S [d] (X R Y O). Item triang. A L χ. A Lq [c] :: 4lat. X R Y O. G X × X O. ex æquo igitur E Lq. A Lq :: H X × X S. G X × X O. Quod *E. D.*

a 4 *hujus.* b 16.5. *et* 22. c *ut sæpe pius.*

Prop. XXIV.

Si in oppositis sectionibus (A, B, C, D) quas conjugatas appellamus, à centro (E) ad sectiones ducantur duæ lineæ (A C, D B) quarum una quidem (A C) sit transversa diameter, altera verò (D B) recta; & ducantur aliæ lineæ (F L, M R) his diametris æquidistantes, quæ & sibi ipsis, & sectionibus occurrant, ita ut occursus (*X*) sit in loco inter quatuor sectiones intermedio: rectangulum contentum portionibus (F X, X L) lineæ diametro transversæ æquidistantis, unà Fig. 216. 217.

cum

cum eo, ad quod rectangulum ex portionibus (M X, X R) lineæ æquidistantis rectæ diametro proportionem habet eandem, quam diametri rectæ (D B) quadratum ad quadratum transverſæ (A C); æquale erit duplo quadrati, quod à dimidia (A E) transverſæ diametri conſtituitur.

1 *Not.* $RN \times MN + NX \times PX = RX \times XM$. Nam $NX \times PX +$
o 5.2. OXq [o] $= ONq$. [p] ergo $NX \times PX + OXq + RN \times NM =$
p 2. ax. 1. $(ONq + RN \times NM$ [o] $= OMq =) RX \times XM + OXq$. unde
q 3. ax. 1. (auferendo OXq utrinque) [q] erit $NX \times PX + RN \times NM =$
$RX \times XM$.

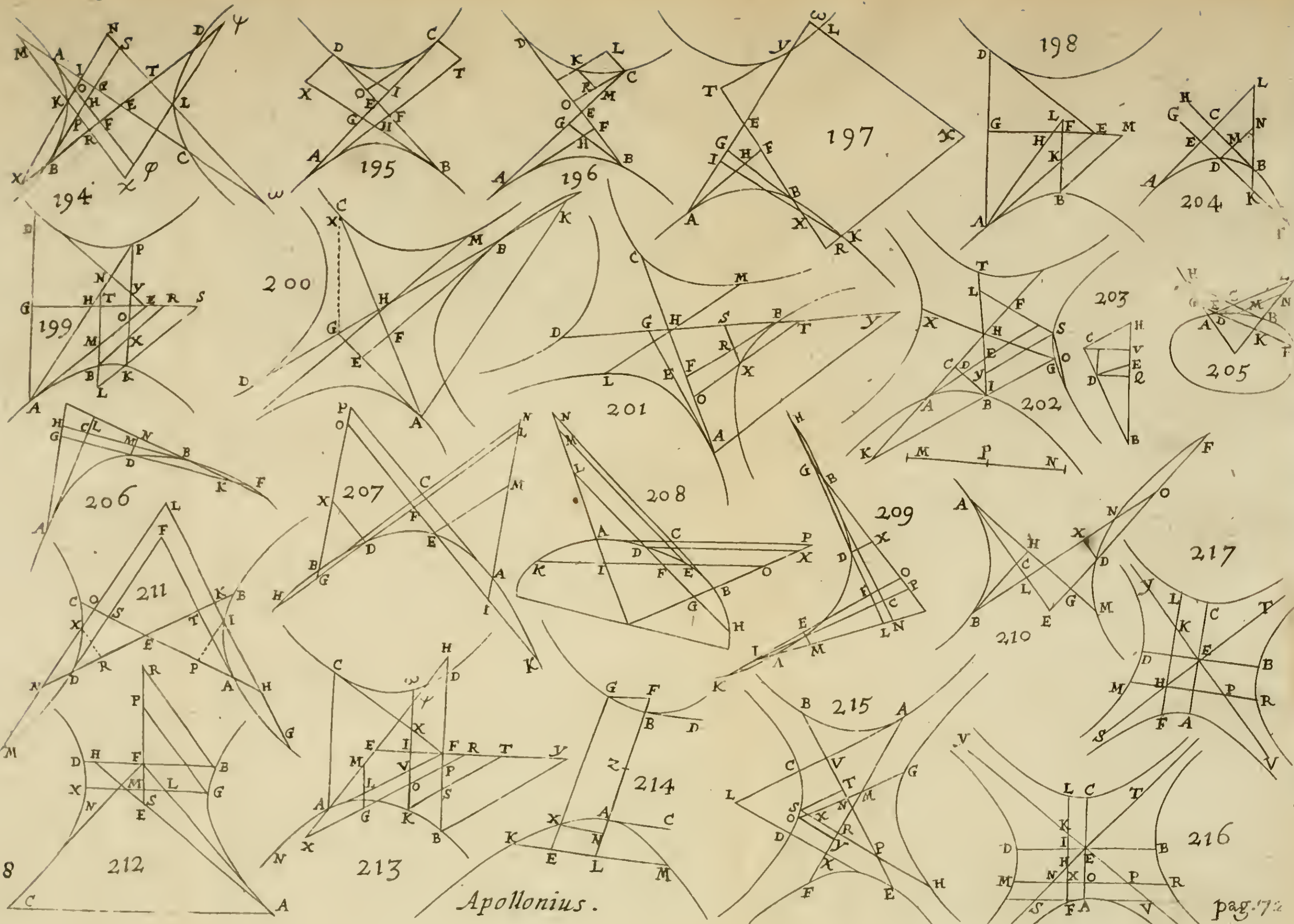
2 *Not.* $LX \times XF + XH \times XK = FK \times HF$ (vel $LH \times HF$)
r 6. 2. Nam $KX \times XH + lHq$ [r] $= lXq$. [s] quare $KX + XH + lHq +$
s 2. ax. 1. $LX \times XF = (lXq + LX \times XF$ [t] $= lFq$ [t] $=) LH \times HF + lHq$.
t 5. 2. & (auferendo commune lHq) [u] erit $KX \times XH + LX \times XF =$
u 3. ax. 1. $LH \times HF$.

a 15. 5. Sint S E T, V E Y aſymptoti; ſitque occurſus primò in angulo
b 56. 1. & 1. 2 hujus. S E V, vel S E Y. Per A ducatur tangens S A V. Eſtque D Bq. A Cq [a] :: (D E q. A Eq [b] (hoc eſt) :: $SA \times AV$. AEq [c] $= SA$. $AE +$
c 23. 6. AV. AE (hoc eſt) [d] :: NX. $XH + PX$. XK [c] $=) NX \times PX$. XH
d 4. 6. $\times XK$ [e] :: $DEq + NX \times PX$. $AEq + XH \times XK$ [f] (hoc eſt ::)
e 12. 5.
f 11. 2. hujus. $PM \times MN$ [g] (vel $RN \times MN$) $+ NX \times PX$. [f] $LH \times HF$ [g] (vel
g 8. 2. hujus. $FK \times HF) + XH \times XK$ (hoc eſt) [h] ::) $RX \times XM$. $FK \times HF +$
h 1 Not. $XH \times XK$ [k] ::) D Bq. A Cq. atqui $LX \times XF + XH \times XK$ [l] $= FK$
k 11. 5. $\times HF$ [f] $=$ A Eq. ergo $LX \times XF + LH \times HF + XH \times XK =$
l 2 Not. 2 A Eq. *Q. E. D.* Sin occurſus H ſit in aſymptoto, erit $FH \times HL$
m 2. ax. 1. [f] $=$ A Eq. [f] & $MH \times HR = DEq$. unde D E q. A Eq [n] :: $MH \times$
n 7. 5. HR. $FH \times HL$. & $2\, FH \times HL$ [m] $= 2$ A Eq.

Prop. XXV.

Fig. 219. Iiſdem poſitis, ſit linearum ipſis A C, B D æquidiſtantium occurſus in una ſectionum (D B) atque in puncto X, ut poſitum eſt: Dico rectangulum (O X N) contentum portionibus lineæ, quæ transverſæ diametro (A C) æquidiſtat, majus eſſe, majus eſt quam illud, ad quod rectangulum (R X M), ex portionibus lineæ æquidiſtantis rectæ diametro (D B), eandem proportionem habet, quam rectæ diametri quadratum ad quadratum transverſæ, duplo quadrati ejus, quod à dimidia
a 11. 2 hujus. transverſæ diametri conſtituitur.

* 10. 2 hujus.
b ſupr. in præc. Nam D Eq [a] (id eſt $PM \times MH$). E Aq* $(LK \times KS)$ :: [b] $PX \times$
X H.



8

Apollonius.

$XH.\ SX \times XL$ [c] $:: RX \times XM.\ TX \times XK :: DEq.\ EAq$; [d] atqui $OT \times TN = 2AEq.$ [e] ideóque $OX \times XN$ [e] (hoc est $TX \times XK +$ $OT \times TN) = TX \times XK + 2AEq.$ *Q. E. D.* c 19.5.Not.f. d 23. 2 hujus. e 2. ax. 1. f Not.

Not. * $PX \times XH - PM \times MH = RX \times XM.$ & x $SX \times XL - LK \times KS = TX \times XK.$ *vid. Not. ad 22 hujus. x v. not. ad 24 h.

Not. $OX \times XN$ z $= TX \times XK + OT \times TN.$ z v. not. ad 24 h.

Prop. XXVI.

Quòd si æquidistantium occursus ad punctum X sit in una sectionum A C, ut positum est; rectangulum (L X F), quod continetur portionibus lineæ æquidistantis transversæ diametro (A C), minus erit quàm illud, ad quod rectangulum (R X G), portionibus alterius lineæ contentum, eandem proportionem habet quàm rectæ diametri quadratum, ad quadratum transversæ, duplo quadrati ejus, quod à dimidia transversæ diametri constituitur. Fig. 220.

Nam (simili ratione) D Eq. [a](hoc est $VG \times GS$, [b] vel $RS \times SG$). $AEq :: VX \times XS.\ KX \times XH$ [c] $:: RS \times SG + VX \times XS.\ AEq + KX \times XS$ [d](hoc est) $:: RX \times XG.\ AEq + KX \times XH.$ Atqui AEq [e]$= (LH \times HF =) KX \times XH - LX \times XF.$ & [f] proinde $2AEq + LX \times XF = KX \times XH + AEq.$ a 11. 2 hujus. b 8. 2. hujus. c 12. 5. d Not. e 11. 2. huj. f 2. ax. 1. huj.

Not. 1.* $RS \times SG + VX \times XS = RX \times XG.$ * vid. Not. 2. ad 24. hujus.

2. [g] $LH \times HF = KX \times XH - LX \times XF.$ g v not. ad 22. hujus.

Prop. XXVII.

Si in Ellipsi vel circuli circumferentia ducantur conjugatæ diametri (A C, B D), quarum altera quidem (A C) sit recta, altera verò (BD) transversa: & ducantur duæ rectæ lineæ (K M, N H) diametris æquidistantes, quæ & sibi ipsis, & sectionibus occurrant: quadrata ex portionibus (N F, F H) lineæ æquidistantis transversæ diametro, quæ inter sectionem, & linearum occursum interjiciuntur, assumentia figuras ($KF \times Z$, & $FM \times Y$) ex portionibus (K F, F M) lineæ, quæ rectæ diametro æquidistat, inter linearum occursum (F), & sectionem interjectis, similes & similiter descriptas ei, quæ ad rectam diametrum constituitur, quadrato transversæ diametri æqualia erunt. Fig. 221.

Ducatur N X ad A E parallela. Sintque R, S recta latera pro dia-

a 12.6. metris B D, A C; [a] fiántque N X. V :: A C. S :: K L. X. Et propter
b 16.5. R, A C, B D, S ∺ [b] erit R. B D [c] hoc eſt N Xq. D X × X B) :: A C.
c 21.1. *hujus.* S [e] :: N X. V [f] :: N Xq. NX × V. Unde N X × V [g] = (D X × X B
e *constr.* [h] =) B Eq − X Eq (− N Gq). Simili diſcurſu K L × X = B Eq −
f 1.6. F Gq. [k] ergo N X × V + K L × X + N G q + F G q = 2 B E q.
g 9.5. [l] atqui 2 N Gq + 2 F Gq = H Fq + F Nq. & 2 N X × V + 2 K L
h 5.2. × X (hoc eſt 2 F L × V + 2 K L × X) [m] = F M × Y + K F × Z. [n] er-
k 2.*ax.*1. go H F q + F N q + F M × Y + KF × Z = 4 B E q [o] = B D q.
l 9.2. *Q. E. D.*
m *ex.* 9.2.
n 2 *ax.* 1.
o 4.2.

Prop. XXVIII.

Fig. 222. Si in oppoſitis ſectionibus (A, B C, D), quas conjugatas appellamus, ducantur diametri conjugatæ (A C, B D), ut earum altera (AC) recta ſit, altera (B D) tranſverſa; & ducantur duæ rectæ lineæ (F K, L N) diametris æquidiſtantes, quæ & ſibi ipſis, & ſectionibus occurrant: Quadrata ex portionibus (L G, G N) lineæ æquidiſtantis rectæ diametro (A C), quæ inter linearum occurſum, & ſectiones interjiciuntur, ad quadrata ex portionibus (F G, G K) alterius lineæ, quæ tranſverſæ diametro (B D) æquidiſtant, inter ſectiones, & occurſum linearum interjectis, eandem proportionem habent, quam rectæ diametri quadratum ad quadratum tranſverſæ.

* 15.5. Ordinatim applicentur F O, & LX. Eſtque A Fq. EBq :: * AC q.
a *cor.* 19.6. BDq [a] :: R.BD :: FOq (EHq). DO × OB [b] :: CX × X A. LXq (EMq)
b 21.1. *hujus.* [c] :: A Eq. C X × X A + E Hq. E B q + D O × O B + F M q.
c 12.5. [d] (hoc eſt) :: X Eq + E Hq. O Eq + E Mq. [e] (hoc eſt) :: L Mq.
d 6.2. + G Mq. F Hq + G Hq [e] :: 2 L Mq + 2 G Mq. 2 F Hq + 2 GHq
e 15.5. [f] (hoc eſt) :: L Gq + GNq. FGq + GKq [g] :: ACq. BDq. *Q.E.D.*
f 9.2.
g 11.5.

Lemma pro ſeq.

Fig. 223. Sit linea recta compoſita *a* + *b* + *c* + *a*. Erit Quad. *a* + *b* + Quad. *c* + *a* = *bb* + *cc* + 2 *a* × : *b* + *c* + *a*. hoc eſt *aa* + *bb* + 2 *ba* + *cc* + *aa* + 2 *ca* = *bb* + *cc* + 2 *ba* + 2 *ca* + 2 *aa*.

Prop. XXIX.

Fig. 224. Iiſdem poſitis, ſi linea (L N) rectæ diametro æquidiſtans, ſecet aſymptotos; quadrata ex ipſius portionibus (X G, G O), quæ inter linearum occurſum, & aſymptotos interjiciuntur, aſſumentia dimidium quadrati facti à recta diametro, ad quadrata ex portionibus (F G, G K,)

G K) lineæ (F K) quæ transversæ diametro æquidistat, inter occursum linearum, & sectiones interjectis, eandem proportionem habent, quàm rectæ diametri quadratum, ad quadratum transversæ.

Nam ob L X [a] = O N, erit L Gq + G Nq [b] = X G q + G Oq + 2 L X × X N [c] (+ 2 A Eq). ergo X G q + G Oq + 2 A Eq (+ ½ A Cq). F Gq + G Kq [d] :: L Gq + G Nq. F Gq + G Kq [e] :: A Cq. B Dq. *Q. E. D.* a 16.2. *hujus.* b *lemm. præc.* c 10.2. *hujus.* d 7.5. e 28. *hujus.*

Prop. XXX.

Si hyperbolen contingentes duæ rectæ lineæ (A D, C D) sibi ipsis occurrant; & per tactus (A, C) producatur linea (A C); per occursum vero (D) ducatur linea (DL) æquidistans uni (F E), asymptoton (F E, FG), sectionémque & lineam tactus conjungentem secans, bifariam dividetur (in K). Fig. 225.

Jungatur F D B M; sitque F H = F B: ducantúrque B E, K N ad A C parallelæ. Estque D Nq . N Kq [a] :: (F Bq. B Eq [b] :: H B. R [c] ::) H N × N B. N Kq. [d] unde H N × N B = D N q. [e] item M F × F D = F Bq. Ergo D N q + M F × F D [f] = (H N × N B + F Bq. [g] =) F Nq ergo D N = N M. [k] quare D K = KL. *Q.E.D.* a 4. & 22. 6. b *cor.* 1. 2. *huj.* c 21. 1. *hujus.* d 9. 5. e 37. 1. *hujus.* f 2. *ax.* 1. g 6. 2. h *conv.* 6. 2. k 2. 6.

Coroll. F Bq. B Eq :: H N × N B. N Kq.

Prop. XXXI.

Si quæ oppositas sectiones contingunt duæ rectæ lineæ (A C, B C) sibi ipsis occurrant; & per tactus (A, B) linea (A B) producatur; per occursum vero (C) ducatur linea (C H) æquidistans asymptoto (EF); quæ sectionem, & lineam tactus conjungentem secet; linea (C H) inter occursum, & eam quæ tactus conjungit interjecta à sectione bifariam dividetur (in G). Fig. 226. *Not.* E *est centrum.*

Ducantur rectæ C E D, & tam E K M N & G X ad A B, quàm K F, G L ad C D parallelæ. Estque N L × L K. L Gq [a] :: (E Kq.KFq [b] ::) M Lq. L Gq. [c] unde N L × L K = M Lq. [d] quare M Lq + K Eq = (N L × L K + K Eq [e] = L Eq [f] =) G X q. ergo cùm G X q. M Lq + K E q :: X C q. L G q + K Eq; [h] erit X C q = (L Gq + K Eq =) [f] (E Xq) [k] C E × E D, [l] ergo C X = X D; [m] adeóque C G = G H. a *cor. præc.* b 4. & 22. 6. c 9. 5. d 2. *ax.* 1. e 6. 2. f 34. 1. &c. h 14. 5. k 38. 1. *huj.* l *conv.* 5. 2. m 2. 6.

Prop. XXXII.

Fig. 227.

Si hyperbolen contingentes duæ rectæ lineæ (A F, C F) sibi ipsis occurrant; & per tactus (A C) producatur linea (A C); per contingentium verò occursum (C) ducatur linea (F K) tactus conjungenti (A C) æquidistans; & per punctum (H), quod conjungentem tactus (A C) bifariam secat, ducatur linea (H K) æquidistans asymptoton alteri (D E): quæ (H K) inter dictum punctum (H), & lineam æquidistantem (F K) interjicitur, à sectione bifariam dividetur (in L).

a *cor. 30. huj.*
b 4 & 22. 6.
c 9. 5.
d 37. 1. *hujus.*
e 2. *ax.* 1.
f 6. 2.
g *Not.*
h 2. 6.
k 1. 2.
l 2. *ax.* 1.
m *prius.*
n 2. 2.
o 3. *ax.* 1.
p *constr.*
q 3. 2.
r 1. *ax.* 1.
s 16. 6.
t 9. 5.
u *constr.*

Ducantur B E, L M ad A C parallelæ. Estque $GM \times MB.MLq.$ [a] :: (D B q. B Eq [b] ::) H M q M Lq. [c] unde $GM \times MB = HMq.$ [d] Item $HD \times DF = DBq.$ [e] ergo $HMq + HD \times DF = (DBq + GM \times MB$ [f] $=) DMq.$ [g] ergo $FM = MH.$ [h] & propterea $KL = LH.$

Not. Fiat $DZ = MH.$ Estque $MD \times DF + MH \times DF$ [k] $= HD \times DF.$ [l] ideóque (addendo utrique ipsum MHq) $MD \times DF + MH \times DF + MHq = (HD \times DF + MHq$ [m] $= DMq$ [n] $=) MD \times DF + MD \times FM.$ ergo (ablato communi $MD \times DF$) $MD \times FM$ [o] $= MH \times DF + MHq$ [p] $= DZ \times DF + DZqq = FZ \times ZD$ [r] $= MD \times FM.$ [s] quare FZ. F M :: M D. Z D. & componendo Z M. F M :: Z M. Z D. unde F M [t] = (Z D [v] =) H M.

Prop. XXXIII.

Fig. 228.

Si, quæ oppositas sectiones contingunt, duæ rectæ lineæ (A G, D G), sibi ipsis occurrant, & per tactus (A, D) linea (A D) producatur; per contingentium verò occursum (G) ducatur linea (C F) æquidistans tactus conjungenti (A D); & per punctum (L), quod conjungentem tactus (A D) bifariam secat, ducatur linea (L N) æquidistans asymptoton alteri (H K), conveniénsque cum sectione, & cum linea æquidistante (F C) per occursum (G) ducta: quæ (L N) inter dictum punctum (L) & lineam æquidistantem (F N) interjicitur, à sectione bifariam dividetur (in M).

a 4, & 22. 6.
b *cor.* 30. *huj.*
c 12. 5.
d 2. 6.
e 38. 1. *huj.*
f 34. 1. &c.
g 9. 5.
h *conv.* 5. 2.
k 2. 6.

Ducantur M P ad A D, & E K, M X ad G H parallelæ. Estque M Pq. P Lq [a] :: (H Eq. E Kq [b] :: $EX \times XB.$ X Mq [c] :: $+ HEq + EX \times XB. EKq + XMq$ (hoc est) :: [d] H Xq (vel P Mq) [e] $GH \times HL + XMq$ (vel) ::) [f] P Mq. $GH \times HL + HPq.$ ergo P Lq [g] $= GH \times HL + HPq.$ [h] quare $LP = PG.$ & [k] consequenter $LM = MN.$

Prop. XXXIV.

Si in una (D C) asymptoton (D C, D E) hpperbolæ, sumatur aliquod punctum (C); ab eoque recta linea (C E) sectionem contingat; & per tactum (B) ducatur æquidistans (F G) asymptoto (D C); quæ (C G) per dictum punctum (C) transit, alteri (D E) asymptoton æquidistans, à sectione bifariam dividetur (in A.) Fig. 229.

Ducantur AH ad CD, & BK ad DE parallelæ; éstque C B[a] = a 3. 2 *hujus.*
B E; [b] ideóque C K = K D. Item K B × K D [c] = C A × C D, b 2, 6.
[d] hoc est C G × C K = C A × C D. [e] quare C G. C A :: (C D. c 12. 2 *hujus.*
C K [f]::) 2. 1. *Q. E. D.* d *Sch.* 48. 1.
e 15. 6.
f *prius.*

Prop. XXXV.

Iisdem positis, si à sumpto puncto (C) ducatur recta linea (C F) sectionem secans in duobus punctis (A, F); erit ut tota (F C) ad eam (C A), quæ extra sumitur, ita inter sese portiones (F L, L A) illius (F A), quæ intra sectionem continetur. Fig. 230.

Ducantur C N X, K A V M, O P B R, Y F parallelæ ad D E; & a 8. 2 *hujus.*
A P S, T F R M X ad C D parallelæ. Estque A C [a] = F G; ac id- b 4. 6. & 14. 5.
circo T G [b] = (K A [c] =) D S. & C K [b] = (T F [c] =) D Y. unde D K c 34. 1.
[d] = C Y. Item rectang H K. rectang K N [e]:: (D K. K C [f]:: C Y. K C d 2 *ax.* 1.
[g] :: E C. C A [g] :: M K. K A :: [e] rectang M D. rectang A D (hoc e 1. 6.
est) [h]::) rectang M D. rectang D B [k] (vel rectang O N) [l] :: rect. f 7. 5.
M D—rectang H K, rectang O N—rectang K N (hoc est) :: rect. g 4. 6.
M H. rectang K B :: [m] rectang M H. rect. A H (ob rectang K S [h] = h 12. 2 *hujus.*
rectang H O; & A B commune :: M V. V A [g] :: F L. L A [n] :: F C. k 3. 2 *hujus.*
C A. *Q. E. D.* l 19. 5. (*et* 4. 6.
m 2 & 3. *ax.* 1.
n 11. 5.

Prop. XXXVI.

Iisdem positis, si à puncto (G) ducta linea (H G) neque sectionem in duobus punctis secet, neque æquidistans sit asymptoto (C E), sed cum opposita sectione conveniat (in A); erit ut tota (A K) ad lineam (K H), quæ inter sectionem (H), & æquidistantem (K L) per tactum (B) interjicitur; ita quæ (A G) est inter oppositam sectionem (A) & asymptoton (C G) ad eam (G H), quæ inter asymptoton (C G), & alteram sectionem (H). Fig. 231.

Ducantur

a 1. 6. Ducantur H M, A N ad C G parallelæ; & B X, G P, R H S N
b 4. 6. parallelæ ad D E. Estque rectang N C. rectang C H [a] :: (N S. S H
c 7. 5. :: [b] A G. G H [c] :: D H. G H. (ob A D = [d] G H) [b] :: C S. S G [a] :: rect
d 16. 2. *hujus.* C R rectang R G [e] :: rectang N C + rectang C R. rectang C H
e 12. 6. [f] (vel rectang L X [g] vel rectang B G) + rectang R G (hoc est) ::
f 12. 2 *hujus.* rectang. N L. rectang R X (hoc est [h] ::) rectang N L. rectang L H
g 3. 2 *hujus.* & 4. 6. :: [a] N R. R H :: [b] A K. K H :: [k] A G. G H. *Q. E. D.*
h *Not.* & 7. 5. *Not.* Rectang R X = rectang LH. ob rectang XH [l] = rectang.
k 11. 5. M B. & commune rectang B H.
l 12. 2 *hujus.*

Prop. XXXVII.

Fig. 232. 233. 234. Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam, vel sectiones oppositas, contingentes duæ rectæ lineæ (A C, B C) sibi ipsis occurrant, & per tactus (A, B) producatur linea (A B); à contingentium vero occursu (C) ducatur linea (C F) sectionem secans in duobus punctis (D, F); erit ut tota (F C) ad eam (C D) quæ extra sumitur ita portiones (F E, E D) inter sese, quæ a linea (A B) tactus conjungente fiunt.

Ducantur diametri C H, A K; & rectæ D P, F R ad A C parallelæ, & L F M, N D O parallelæ ad A B.

a 4. & 22. 6. Estque triang L M C. triang X O C :: [a] L Mq. X Oq [a] :: L Cq
b 49 & 51. 1. *huj. et* 2. *ax.* 1 C Xq [a] :: F Cq. C Dq [a] :: F Mq. D Oq [a] :: triang F R M triang D P O [a] :: triang L A K ([b] hoc est 4lat. L C R F). triang X A N ([b] hoc est
c 2. & 22. 6. 4lat. X C P D) [a] :: L Aq. A Xq [c] :: F Eq. E Dq [d] :: F Cq. C Dq. [e] quare
d 11. 5. F E. E D :: F C. C D. *Q. E. D.*
e 22. 6. *Coroll.* L M. X O :: F E. E D.

Prop. XXXVIII.

Fig. 235. 236. Iisdem positis, Si per contingentium occursum (C) ducatur recta linea (C O) æquidistans tactus conjungenti (A B); & per punctum (E), quod conjungentem tactus bifariam dividit, ducatur linea (F O) secans, & sectionem ipsam in duobus punctis (F, D), & lineam æquidistantem (C O) per occursum ductam: erit ut tota (F O) ad eam (O D), quæ extra sumitur inter sectionem, & lineam æquidistantem; ita portiones (F E, E D) inter sese, quæ a linea (A B) tactus conjungente efficiuntur.

a *cor. præc.* Ducantur L F K M, D H G X N parallelæ ad A B; ac F R, G P
b 4 6. ad F C parallelæ. Estque F E. E D [a] :: LM. XH [b] :: LC. C X [c] :: FO.
c 2. 6. d 11. 5. O D [d] :: F E. E D. *Q. E. D.*

Prop.

Prop. XXXIX.

Si, quæ oppositas sectiones contingunt, duæ rectæ lineæ (AD, BD) sibi ipsis occurrant, & per tactus (A, B) linea (A B) producatur; à contingentium verò occursu (D) ducta linea (E G) & utramque sectionem (E, F) & lineam (A B) tactus conjungentem secet (in G): erit ut tota (E G) ad eam (F G), quæ extra sumitur inter sectionem & conjungentem tactus; ita portiones (E D, D F) inter sese, quæ inter sectiones (E, F), & contingentium occursum (D) interjiciuntur. Fig. 237.

Per centrum C ducatur A C K; & fiant E H S K, F N M X O ad A B parallelæ, ac E P F R ad A B parallelæ. Estque E H. H D [a]:: F M. M D. & H D. H S [a]:: M D. M X. unde ex æquo E H. H S :: F M. M X. [b] quare E Hq. F Mq [c] (id est triang. E H P. triang F M R) :: H Sq. M Xq [c] (hoc est triang D H S. D M X.) atqui triang E H P [d] = triang A S K + triang H D S. & triang F M R [d] = triang. A X N + triang D M X. [e] quare triang H D S. triang DMX ([c] hoc est H Dq. D Mq [c] vel E Dq. D Fq) :: triang A S K. triang A X N [f] :: K Aq. A Nq. Est autem K A. A N :: E G. G F (Nam KA. A Q. [c]:: E G. G Q. & A Q. A N [c]:: G Q. G F; adeóque ex æquo K A. A N :: E G. G F). [g] ergo demum est E G. G F :: ED. DF. *Q. E. D.*

a 4. 6.
b 16. 5. & 22. 6.
c 4. 6. & 22. 6.
d 11. *hujus*.
e 19. 5.
f 22. 6.
g 11. 5.

Not. K A. A N :: E G. G F.

Prop. XL.

Iisdem positis, si per contingentium occursum (D) ducatur recta linea (F G) tactus conjungenti (A B) æquidistans; & à puncto (E), quod conjungentem tactus bifariam dividit, ducatur linea (H L) secans utramque sectionem (in H, K) & æquidistantem (F G in L) ei, quæ tactus conjungit: erit ut tota (H L) ad eam (L K), quæ extra sumitur, inter æquidistantem, & sectionem, ita portiones (H E, E K) inter sese, quæ inter sectiones, & conjungentem tactus interjiciuntur. Fig. 238.

Ducantur A C X T; & parallelæ H N M X, K O B ad A B; & H R, K S ad A D. Estque triang H R N. [a] (triang X M A + triang M N D). triang K S O [a] (triang A Y P + triang P O D) [b] :: [b] H Nq. K Oq :: M Aq. A Pq (nam H N. K O [c] :: H E. E K [d] :: X A. A Y :: [c] M A. A P) [b] :: triang X M A. triang YAP [e] :: triang M N D. triang

a 11. *hujus*.
b 4 & 22. 6.
c 4. 6.
d 34. 1. & 7. 5.
e 19. 5.

f *Not.* triang POD [b] :: MNq. POq [b] :: NDq. DOq [f] :: HLq. LKq [g] ::
g *supra et* 11.5 HEq. EKq. [h] quare HL. LK :: HE. EK. *Q. E. D.*
h 22.6.
k 4.6. *Not.* ND. DO :: HL. LK. Nam ND. DO [k] :: (MD. DP
l 34.7. & 7.5. [l] :: HV. VK [k] ::) HL. LK.

Prop. XLI.

Fig. 239. 240. Si parabolen contingentes tres rectæ lineæ (AE, CE, DF) inter ſe conveniant, in eandem proportionem ſecabuntur. (ED. DA :: CF. FE :: FB. BD).

a 29.2. *hujus.* b 35.1. *huj.* c 5.2. *hujus.* d 4.6. e 4.6. Ducatur AC, quam biſecet EG. Si hæc per tactum B tranſit, parallela, & [a] erit diameter. & [b] EB = BG. & DF ad AC [c] parallela. [d] Unde ED = DA. & EF = FG. [e] & DB = BF, quare liquet propoſitum.

* 46.1. *huj.* f 35.1. *huj.* g 2.6. h 7.5. k 15.5. l *conſtr.* m *prius.* n 2.6. o 4.6. p 15.5. q *prius* & 4.6. Sin per aliud punctum H tranſeat; per H ducatur tangens KHL ad AC parallela, & diameter MBX (per B) ad EG * parallela; & ordinatim applicentur AO, CP (ab A, & C). Eritque MB [f] = BP. ideóque MF [g] = FC. & EL [g] = LC (ob EH [f] = HG). unde FC. LC [h] :: (MF. EL [k] :: MC. EC) XC. GC. item LC. CE :: (1.2 ::) GC. [l] CA. ergo ex æquali FC. CE :: XC. CA. quare inverſè dividendo FC. FE :: (CX. XA ::) ED. DA (nam KA EA [m] :: 1.2 :: BO. ON [n] :: DA. AN, & permutando KA. AD :: (EA. AN [o] ::) GA. AX. & EA. KA :: CA. GA. unde ex æquali EA. AD :: CA. AX. dividendóque ED. AD :: CX. XA).

Porro, CX. XA [o] :: CP. AO [p] :: $\frac{1}{2}$CP. $\frac{1}{2}$AO (hoc eſt) [q] :: BF. DB. ergo ED. AD :: BF. DB.

Prop. XLII.

Fig. 241. 242. 243. Si in hyperbola, vel ellipſi, vel circuli circumferentia, vel oppoſitis ſectionibus, ab extremo diametri (AB) ducantur lineæ (AC, BD) æquidiſtantes ei, quæ ordinatim applicata eſt; & ducatur alia quæpiam linea (CE) quomodocunque contingens; abſcindet ex ipſis lineas (AC, BD) continentes rectangulum æquale quartæ parti figuræ, quæ ad eandem diametrum (AB) conſtituitur.

a 16.1. *huj.* Per centrum F ducatur FGH ad AC vel BD parallela. In hac eſt [a] diameter (puta FG) ipſi AB conjugata. Item per tactum E ducatur EL ad AC parallela; & EM parallela ad AB. Eſtque KF.

AF

AF[b] :: AF. FL. unde (in hyperbole) KF. AF.[c] (KF + AF. AF + FL (hoc eſt) :: KA. AL. vel (in ellipſi) per converſam rationem, & permutando KF. AF (vel FB) :: KA. AL. [d] quare KB. (FB − KF. vel FB + KF) KF :: KL. (AL − KA vel AL + KA). KA. [e] hoc eſt BD. FH :: LE. AC. unde BD × AC [f]= (FH × LE [g]= FH × FM =[h] FGq [k]=) $\frac{1}{4}$ TR [l]= BD × AC. *Q. E. D.*

b *cor.* 37. 1. *h.* c 12. 5. d *inverſè & converſè. vel componendo.* e 4. 6. f 16. 6. g 34. 1. h 38. 1. *huj.* k *cor. def. ad* 16 1. *hujus.* l 1. *ax.*

Prop. XLIII.

Si hyperbolen contingat recta linea (CH), abſcindet ex aſymptotis (DC, DE) ad ſectionis centrum (D) lineas (DC, DH) continentes rectangulum æquale ei, quod continetur lineis (DF, DG) abſciſſis ab altera contingente (FG), ad ſectionis verticem (B), qui eſt ad axem (BD). Fig. 244.

Ducantur AK, BL ad DG; & AM, BN ad CD parallelæ. Eſtque CH [a]= 2AH; & ideò CD [b]= 2AM. & DH [b]= 2AK. unde CD × DH [c]= (4AK × AM [d]=) 4BL × BN. Simili diſcurſu 4BL × BN = FD × DG. [e] unde CD × DH = FD × DG. *Q. E. D.*

a 3. 2 *hujus.* b 4. 6. c *Sch.* 48. 1. d 12. 2 *hujus.* e 1. *ax.* 1.

Non aliter argumentabimur, etſi DB non ſit axis, ſed alia quæpiam diameter.

Prop. XLIV.

Si quæ hyperbolen, vel oppoſitas ſectiones contingunt, duæ rectæ lineæ (CF, EG) occurrant aſymptotis (DC, DE); quæ (CE, GF) ad occurſus ducuntur, lineæ (AB) tactus (A, B) conjungenti æquidiſtantes erunt. Fig. 245. 246.

Nam ob CD × DF [a]= ED × DG, [b]erit CD. ED :: DG. DF. [c] quare CE, GF parallelæ ſunt. ergo HG. GE :: HF. FC. item GE. GB ::[d] 2. 1 :: FC. CA. ergo ex æquo HG. GB :: HF. FA. inverſéque GB. HG :: FA. HF. & diviſè HB. HG :: HA. HF. [c] quare GF, & AB parallelæ ſunt. *Q. E. D.*

a 43. *hujus.* b 15. 6. c 6. 6. *&c.* d 3. 2. *hujus.*

Prop. XLV.

Si in hyperbola, vel ellipſi, vel circuli circumferentia, vel oppoſitis ſectionibus, ab extremo axis (AB) lineæ (AC, BD) ad rectos angulos ducantur, & quartæ parti figuræ æquale rectangulum (AFB, AGB) comparetur ad axem ex utraque parte; quod in hyperbola quidem, & ſectionibus oppoſitis excedat figurâ quadratâ, in ellipſi ve- Fig. 247. 248.

rò deficiat; & ducatur linea (E C) sectionem contingens, occurrénsque eis (A C, B D) quæ sunt ad rectos angulos; lineæ (CF, DG), quæ ab occursibus (C, D) ducuntur ad puncta (F, G) ex eo comparatione factâ, angulos rectos (C F D, D G C) ad ea (F, G) efficient.

a 42. *hujus.* b *hyp.* c 15. 6. d 6. 6. e 32. 1. f. 2 *cor.* 13. 1.

Nam A C × B D[a] = ($\frac{1}{4}$ TR [b]=) A F × F B. unde A C. A F[c] :: F B. B D. item anguli C A F, F B D [b]recti sunt. [d] ergo ang. A C F = ang B F D. [d] & ang. A F C = ang. F D B. ergo cùm anguli A C F, A F C [e] conficiant unum rectum, etiam anguli B F D, A F C uni recto æquabuntur. unde (in ellipsi) reliquus D F C [f] rectus erit. Simili discursu angulus C G D rectus ostendetur.

Prop. XLVI.

Fig. 249. 250.

Iisdem positis, lineæ conjunctæ æquales facient angulos (A C F, D C G, & C D F, B D G) ad contingentes (C D, B D).

a *præc. et* 31. 3. b 21. 3. c *in præced.*

Circulus enim diametro D C descriptus [a] per puncta F, G transibit. unde ang. D C G [b]angulo D F G, [c]hoc est angulo A C F, æquatur. Similiter ang. C D F = ang. B D G. *Q. E. D.*

Prop. XLVII.

Fig. 251. 252.

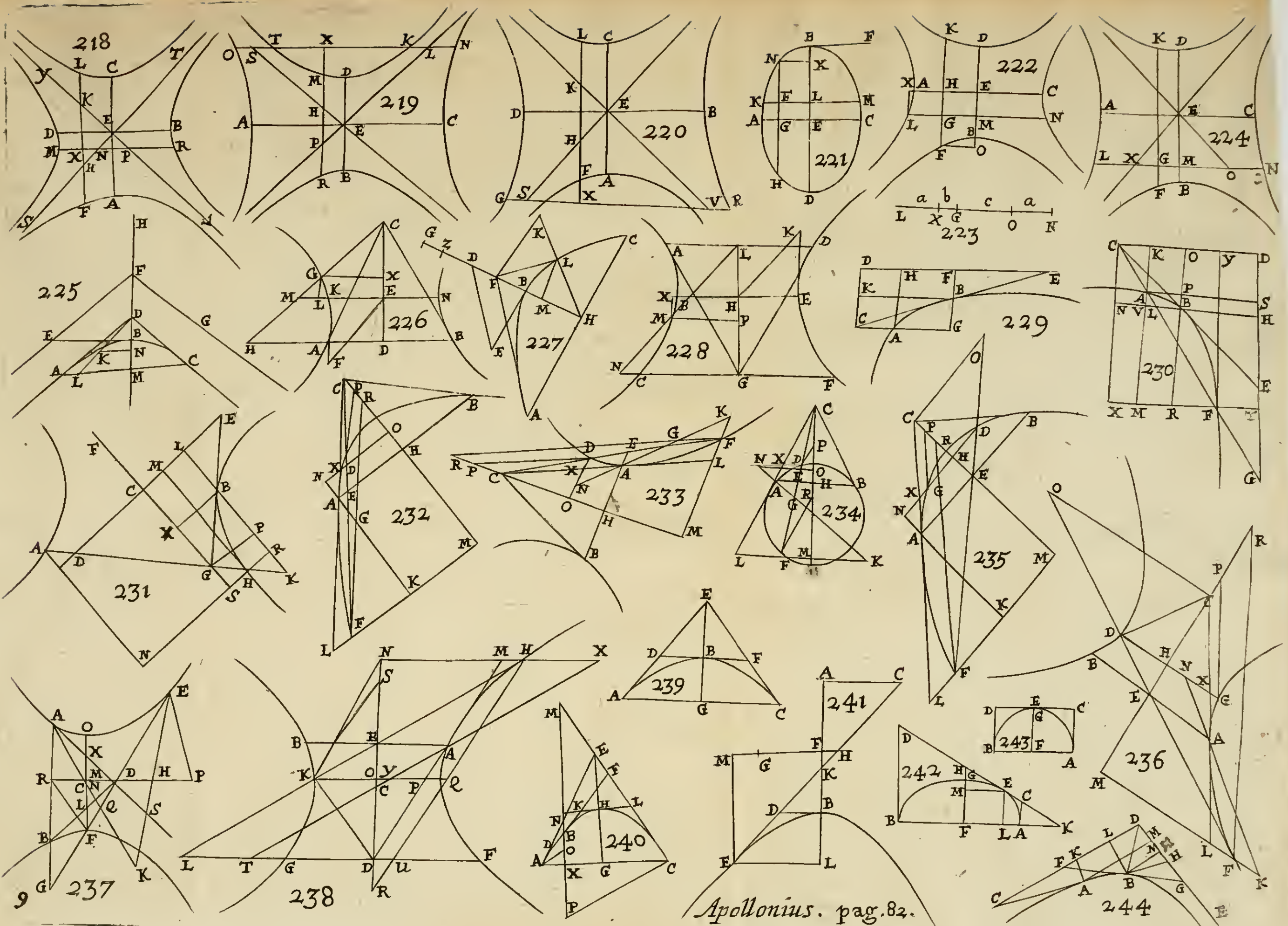
Iisdem positis, linea (H E) ab occursu (H) conjunctarum (C G, F D) perpendicularis est ad contingentem (C D).

a 46. *hujus.* b 15. 1. c *hyp.* d 4. 6. e 45. *hujus.*

Si negas, estò H L ad E C perpendicularis; & ordinatim applicetur E M (ad B D parallela). Atque ob ang. G D B [a] = (ang. C D F [b]=) ang. L D H. & [c] rectos D B G, D L H, erunt trigona G D B, D H L similia. quare B D. D L [d]:: (G D. D H [d] :: F C. C H (ob similia trigona G D H, F C H; nam anguli [e] C F H, D G H recti sunt, & qui ad H æquales, vel communes) :: [d] A C. C L. (ob similia trigona C A F. C L H); nam & hîc ang. A C F [a] = ang. L C H. & anguli F A C, C L H [c] recti sunt). ergo permutando D L. C L :: (B D. A C [f] :: B K. A K [g] :: B M. A M [h] ::) D E. E C. ergo inversè C L. D L :: E C. D E. & divisè C D. D L :: C D. D E. quare D L [k] = D E. [l] *Q. E. A.* Ergo H E potiùs est perpendicularis ad E C. *Q. E. D.*

f 4. 6. g 36. 1. *huj.* h 2. & 4. 6. k 9. 5. l 9. *ax.* 1.

Prop.



9

Apollonius. pag.82.

Prop. XLVIII.

Iisdem positis, ostendendum est lineas (E F, E G), quæ à tactu ducuntur ad puncta (F, G) ex comparatione facta, æquales continere angulos (C E F, G E D) ad contingentem (C D). Fig. 253. 254.

Circulus enim diametro D H descriptus [a] transit per puncta E G [b](ob angulos D G H, DEH rectos) unde ang. D E G [c]= (ang DHG [d]=ang. C H F [c]=) ang. C E F.
Not. In hyperbole anguli D H G, C HF sunt idem angulus.

a 31. 3.
b 45. et 47. h.
c 21. 3.
d 15. 1.

Prop. XLIX.

Iisdem positis, si à punctorum aliquo (G) ad contingentem (C D) agatur perpendicularis (G H); quæ à facto puncto (H) ducuntur ad axis extrema (A, B) angulos rectos (A H B) continebunt. Fig. 255. 256.

Nam (ob angulos D B G, D H G [a] rectos) circulus super diametro D G descriptus [b] transit per puncta B, H. unde ang. G H B [c] = ang. B D G [d]= ang A G C [e]= ang A H C [f]= ang G H B. ergo (addito communi angulo B H C, vel A H G) [g] erit ang. A H B=ang. C H G [h]= rect. *Q. E. D.*

Not. ang. A G C=ang. A H C. Nam (ob [h]rectos angulos CAG, C H G) circulus, diametro C G descriptus, [b]per puncta A, H transibit, in quo anguli A G C, A H C eidem arcui A C insistent, & proinde [c]æquales erunt.

a hyp.
b 31. 3.
c 21. 3.
d 45. hujus.
e Not.
f 1. ax. 1.
g 2. ax. 1.
h hyp.

Prop. L.

Iisdem positis, si à sectionis centro (H) ducatur linea (H L) contingenti occurrens, æquidistánsque lineæ (F E) per tactum (E) & per unum (F) punctorum ductæ; erit (H L) æqualis dimidio (H B) axis (A B). Fig. 257. 258.

Junganrur EG, AL, LG, LB, ducatúrq; GM ad EF parallela. Estque (ob FH [a]= HG)EN [b]= N G; ideóq; E L [b] = LM. Item (ob ang. DEG [c]= (ang C E F[d]=) ang E M G.) [e] Erit E G = G M. quare ang. G L E [f]= ang G L M. ergo G L ad E M est perpendicularis. [g] ergo ang A L B est rectus. [h] ergo circulus diametro A B describtus transibit per L; & radius H L radio H A æquabitur. *Q. E. D.*

a hyp.
b 2. 6.
c 48. hujus.
d 29. 1.
e 6. 1.
f 8. 1.
g 49. hujus.
h 31. 3.

Prop. L I.

Fig. 259. Si in hyperbola, vel oppositis sectionibus ad axem (A B) comparetur rectangulum (A D B, A E B) æquale quartæ parti figuræ, excedénsque figura quadrata; & à punctis (D, E) ex comparatione factis ad quamlibet sectionem inclinentur rectæ lineæ (D F, E F); major (E F) minorem (D F) quantitate axis (A B) superabit.

a 29. 1.
b 48. *hujus.*
c 6. 1.
d 2. 6.
e 4. 6.
f 50. *hujus.*
g 1. *ax.* 1.

Recta F K H tangat sectionem in F, & per centrum C ducatur G C H ad F D parallela. Estque ang. K H G [a] = (ang K F D [b] =) ang G F H. unde G H [c] = (G F [d] =) G E (ob C D = C E). Item. F D [e] = 2 G C. & C H [f] = C B (ideóque 2 C H = A B). [g] ergo E F (hoc est 2 G H) = (2 G C + 2 C H =) F D + A B. *Q. E. D.*

Prop. L I I.

Fig. 260. Si in ellipsi ad majorem axem (A B) ex utraque parte comparetur rectangulum (A C B, A D B) æquale quartæ parti figuræ, deficiénsq; figurâ quadratâ; & à punctis (C, D) ex comparatione factis ad sectionem inclinentur rectæ lineæ (C E, D E), ipsi axi (A B) æquales erunt.

a 48. *hujus.*
b 29. 1.
c 6. 1.
d 2. 6.
e *hyp.*
g 1. *ax.* 1.
h 4.
k 50. *hujus.*

Recta F E H tangat sectionem, & per centrum G ducatur G K H ad C E parallela. Estque ang H E K [a] = (ang F E C [b] =) ang E H G. unde K H [c] = (K E [d] =) K D (ob G C [e] = G D). [g] ergo C E [h] (2 G K) + E D (2 K H) = 2 G H. [k] = 2 A G [e] = A B [g] = C E + E D.

Prop. L I I I.

Fig. 261. 262. Si in hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia, vel oppositis sectionibus ab extremo diametri (A C) ducantur lineæ (A D, C E) ordinatim applicatis æquidistantes; & à dictis terminis (A, C) ad idem sectionis punctum (B) ductæ lineæ (A B, C B) secent æquidistantes (A D, C E); rectangulum ex abscissis (A D, C E) factum, æquale erit figuræ, quæ ad eandem diametrum (A C) constituitur.

a 4. 6.
b 23. 6.
c 21. 1. *huj.*
d 1. 6.
e 11. 5.
f 9. 5.

Ordinatim applicetur B F. Estque A F. F B [a] (hoc est A C. C E) + C F. F B [a] (hoc est A C. A D) [b] = A F × C F. F Bq [c] :: T. R. [d] :: Tq. (A Cq). T R [e] = A C. C E + A C. A D [b] = A Cq. C E × A D. [f] ergo C E × A D = T R. *Q. E. D.*

Prop.

Prop. LIV.

Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam contingentes duæ rectæ lineæ (A D, C D) sibi ipsis occurrant; & per tactus (C, A) ducantur contingentibus æquidistantes (C G, A F); à tactibus verò ad idem sectionis punctum (H) ductæ lineæ (A H, C H) æquidistantes secent (in G, & F); rectangulum constans ex abscissis (A F, C G) ad quadratum lineæ (A C) tactus conjungentis, proportionem habebit compositam ex proportione, quam habet quadratum portionis (EB) lineæ (D E) ab occursu (D) contingentium ad punctum (E) medium conjungentis tactus ductæ, quæ est intra sectionem ad quadratum reliquæ (B D), & ex proportione, quam habet rectangulum ex contingentibus (A D, C D) factum, ad quartam partem quadrati lineæ (AC) tactus conjungentis. Fig. 263.

Per H, B ducantur K H O X L, M B N ad A C parallelæ. Liquet M N sectionem [a] tangere, & fore M B [b]= B N & K O [b]= O L. (nam A E [c]= E C) item H O [d]= O X; [e] quare H K = X L. & [f] X K = L H. Hinc A Mq. M B × B N (M Bq) [g] :: A Kq. X K × K H (L H × K H). & permutando A Mq. A Kq :: M B × B N. L H × K H. [h] item N C × A M. A Mq :: L C × A K. A Kq. ergo ex æquali N C × A M. M B × B N :: L C × A K. L H × K H [l] = L C. L H [m] (F A. A C) + A K. K H. [m] (G C. A C) [l] = F A × G C. A Cq [n] :: N C × A M. M B × B N [o] = N C × A M. N D × D M. [p] (E Bq. B Dq) + N D × D M. M B × B N [q] (C D × D A. A E × E C) [n] ergo F A × G C. A Cq = E Bq. B Dq + C D × D A. A E × E C. *Q. E. D.*

- a 32. 1.
- b ex. 4. 6.
- c hyp.
- d 46, & 47 1. hujus.
- e 3. ax. 1.
- f 2. ax. 1.
- g 16. hujus.
- h Not. 1.
- l 23. 6.
- m 4. 6.
- n 11. 5.
- o 5. def. 6.
- p Not. 2.
- q Not. 3.

Not. 1. N C × A M. A Mq :: L C × A K. A Kq. Nam (propter parallelas A C, K L, M N) est A M. A K [a] :: N C. L C. & permutando A M. N C :: A K. L C. [b] hoc est A Mq. A M × N C :: A Kq. A K × L C. & inversè.

- a 2. 6.
- b 1. 6.

Not. 2. N C × A M. N D × D M :: E Bq. B Dq. Nam A M × C N. N D × D M [c] = (A M. D M [d] (E B. B D) + C N. N D [d] (E B. B D) = E B. B D + E B. B D [d] =) E Bq. B Dq.

- c 23. 6.
- d 2. 6.

Not. 3. N D × D M. M B × B N :: C D × D A. A E × E C. Nam N D × D M. M B × B N [e] = (N D. B N [f] (hoc est C D. E C) + D M. M B [f] (hoc est D A. A E) = C D. E C + D A. A E [e] =) C D × D A. E C × A E.

- e 23. 6.
- f 4. 6.

Prop.

Prop. LV.

Fig. 264. Si quæ oppositas sectiones contingunt, rectæ lineæ (A G,DG) sibi ipsis occurrant; & per occursum (G) ducatur linea (C E) conjungenti tactus (A D) æquidistans; per tactus verò ducantur contingentibus æquidistantes (A M, D M); & à tactibus ad idem alterius sectionis punctum (F) ducantur lineæ (A F, F A), quæ secent æquidistantes (DM, A M), rectangulum constans ex abscissis (A H,D N) ad quadratum lineæ (A D) tactus conjungentis, eandem proportionem habebit, quam rectangulum ex contingentibus (AG, D G) factum ad quadratum lineæ (C G) ab occursu (G) ad sectionem ducta, quæ quidem (C G) conjungenti tactus (D A) æquidistet.

* Not. 1. a 20. hujus. b Not. 2. c 23. 6. d 4. 6.

Per F ducatur F L K B ad A D parallela. Estque EGq. *(vel CGq) G Dq[a] :: B L × L F *(vel K F × L F). L Dq. item G Dq. G D × G A :: L Dq. L D × A K. ex æquali igitur C Gq G D × G A :: K F × L F. L D × A K [c]= K F. A K [d](A D. D N) + L F. LD [d](AD. A H) = A D. D N + A D. A H [d] = A Dq. D N × A H. ac inversè G D × G A. C Gq :: D N × A H. A Dq. *Q. E. D.*

e 38. 2 hujus. f ex. 4. 6. g 3. ax. 1.

Not. 1. E G = C G. & L F = K B, vel K F = L B. Nam bisectâ A D in O, [e] erit G O recta diameter, cui conjugata quæ ad AD parallela ergo C G = G E. & B P = P F. [f] item K P = P L. [g] ergo K B = LF &c.

h 4. 6 & conversè. k 1. 6.

Not. 2. G Dq. G D × G A :: L Dq. L D × A K. Nam propter parallelas A D, K L, erit G D. L D [h]:: GA. KA. & permutando G D. G A. [k] (hoc est G Dq. G D × GA) :: L D . K A [k] (hoc est) :: L Dq. L D × K A.

Prop. LVI.

Fig. 265. Si quæ unam oppositarum sectionum contingunt, rectæ lineæ (AE, B E) sibi ipsis occurrant; & per tactus (A, B) ducantur contingentibus æquidistantes (B N, A M); à tactibus verò ad idem alterius sectionis punctum (C) ducantur lineæ (A C,BC), quæ æquidistantes (B N, A M) secent (in N,M): rectangulum constans ex abscissis (BN, A M) ad quadratum lineæ (A B) tactus conjungentis proportionem habebit compositam ex proportione, quam habet quadratum portionis (L D) lineæ, ad punctum L medium conjungentis tactus (A B) ductæ, quæ est inter dictum punctum (L), & alteram sectionem (D) ad qua-

quadratum ejus (D E), quæ inter sectionem (D), & occursum (E) interjicitur; & ex proportione, quam habet rectangulum, ex contingentibus (AE, BE) factum ad quartam partem quadrati lineæ (A B) tactus conjungentis.

Ducantur C G K, D H F ad A B parallelæ. Estque B H q. H D q [a] (H D × D F) [b] :: B Kq. P K × K C [a] (C G × K C). item F A × B H. B Hq [c] :: G A × B K. B Kq. ergo ex æquali F A × B H. H D × D F :: G A × B K. C G × K C. atqui F A × B H. H D × D F [d] = F A × B H. H E × E F [e] (L Dq. D Eq) + H E × E F. H D × D F [f] (A E × E B. A L × L B). [g] ergo L Dq × D Eq + A E × E B. A L × L B = G A × B K. C G × K C [h] = B K. K C [k] (A M. A B) + G A. C G [k] (NB. A B) = A M. A B + N B. A B [h] = A M × N B. A Bq [g] = LDq D Eq + A E × E B. A L × L B. *Q. E. D.*

a *Not.* 1.
b 18. *hujus.*
c *Not.* 2.
d 5. *def.* 6.
e *Not.* 3.
f *Not.* 4.
g 11. 5.
h 23. 6.
k 4. 6.

Not. 1. H D = D F. & P K = C G. Nam ob A L [l] = L B [m] est H D = D F. [m] & K X = X G. item X C [n] = X P. [o] ergo P K = C G.

Not. 2. F A × B H. B Hq :: G A × B K. B Kq. Nam propter parallelas B A, F H, G K; [p] erit F A. A G :: H B. B K. & permutando F A. H B [q] (hoc est F A × H B. H Bq) :: A G. B K (hoc est A G × B K. B Kq).

Not. 3. F A × B H. H E × E F :: L Dq. D Eq. Nam F A × B H. H E × E F [r] = F A. E F [s] (L D. D E) + B H. H E [s] (L D. D E) = L D. D E + L D. D E [r] = L Dq. D Eq.

Not. 4. H E × E F. H D × D F :: A E × E B. A L × L B. Nam H E × E F. H D × D F [t] = H E. H D [v] (E B. B L) + E F. D F [u] (E A. A L) = E B. B L + E A. A L [t] = E B × E A. B L × A L.

l *hyp.*
m *ex.* 4. 6.
n 47 1. *huj.*
o 2. *ax.* 1.
p *ex.* 2. *vel* 4. 6.
q 1. 6.
r 23. 6.
s *ex.* 4. 6.
t 23. 6.
u 4. 6.

APOL-

APOLLONII
CONICORUM
LIB. IV.

Prop. I.

Fig. 266. SI in coni sectione, vel circuli circumferentia sumatur aliquod punctum (D) extra; atque ab eo ad sectionem ducantur duæ rectæ lineæ (D B, D C); una quidem (D B) contingens, altera verò (DC) in duobus punctis (E, C) secans; & quam proportionem habet tota linea secans (C D) ad partem sui ipsius (D C), quæ extra sumitur, inter punctum (D) & sectionem interjecta; in eandem dividatur, quæ (C E) est intra, ita ut rectæ lineæ ejusdem rationis ad unum punctum conveniant (C D. D E :: C F. F E); quæ à tactu (B) ad divisionem (F) ducitur, occurret sectioni; & quæ ab occursu ducitur ad punctum (D) extra sumptum, sectionem continget.

Est quasi conversa 37æ 3ii.

a 49. 2. huj. b 37. 3. hujus. c hyp. d 9. 5.

Ex D [a] ducatur tangens D A, & connectatur A B, secans D C in G. ergo C G . G E [b] :: (C D. D E [c] ::) C F. F E. ergo componendo C E . G E [d] :: C E. F E. ergo G E = F E. ergo puncta G, F coincidunt. *Q.E.D.*

Coroll. B A secat D C in F.

Prop. II.

Hæc quidem communiter in omnibus sectionibus demonstrata sunt; at in sola hyperbola si linea D B sectionem contingat, & D C in punctis E, C secet, puncta verò E, C contineant tactum ad B, & punctum D sit extra angulum asymptotis comprehensum, similiter fiet de-

demonstratio. * Possumus enim à puncto D aliam ducere contingentem D A, & quæ reliquæ sunt ad demonstrationem, perficere. * 49. 2. *huj.*

Prop. III.

Iisdem existentibus puncta E, C punctum B non contineant, sitque punctum D intra angulum asymptotis comprehensum, poterimus à puncto D alteram contingentem ducere, quæ sit D A, & reliqua similiter demonstrare. Fig. 267.

Prop. IV.

Iisdem positis, si occursus E, C contineant tactum ad B; & punctum D sit in angulo (L X N), qui deinceps est angulo (K X N) asymptotis (K L, M N) comprehenso; linea quæ à tactu (B) ad divisionem (F) ducitur, occurret oppositæ sectioni; & quæ ab occursu ducitur eandem sectionem continget. Fig. 268.

Ex D [a] ducatur DH tangens oppositam sectionem, & connectatur HB, secans C E in G. [b] ergo C G. G E :: (C D. D E [c] ::) C F. F E. & componendo C E. GE :: C E. F E. [d] ergo puncta G, F coincidunt. *Q.E.D.*

a 49. 2. *huj.* b 37. 3. *huj.* c *hyp.* d 9. 5.

Coroll. H B secat D C in F.

Prop. V.

Iisdem positis, si punctum D sit in una (X N) asymptoton; quæ à puncto B ad F ducitur, eidem asymptoto (X N) æquidistabit. Fig. 269.

Nam per B ductâ B G ad X N parallelâ, erit rursus C G. G E [a] :: (C D. D E [b] ::) C F. F E. ergo componendo, C E. G E :: C E. F E. [c] unde G, & F coincidunt.

a 35. 3. *huj.* b *hyp.* c 9. 5.

Prop. VI.

Si in hyperbola extra sumatur aliquod punctum (D), à quo ad sectionem ducantur duæ rectæ lineæ (D B, D F); altera quidem (D B) contingens, altera verò (D F) æquidistans uni asymptototon; & æquidistantis portio (E D) inter sectionem & punctum (D) interjecta, æqualis sit ei (E F), quæ intra sectionem continetur: linea, quæ à tactu (B) ducitur ad factum punctum (F), occurret sectioni; & quæ ab occursu ducitur ad punctum extra sumptum (D) sectionem continget. Fig. 270.

 Pona-

a 49.2. *hujus.* b 30. 3. *hujus.* c *hyp.* Ponatur D intra angulum asymptotis comprehensum; ex D [a] ducatur tangens D A, conjungatur B A, secans D F in G. ergo E G [b] = E D [c] = E F, quare puncta E, F coincidunt. *Q. E. D.*

Coroll. A B secat D E in F.

Prop. VII.

Fig. 271. Iisdem positis, sit punctum D in angulo deinceps ei, qui asymptotis continetur. Dico etiam sic eadem evenire.

a 31. 3. *huj.* b *hypoth.* Iterum, ex D ducatur tangens D H, & connectatur H B secans DF in G. ergo E G [a] = E D [b] = E F. ergo non differunt puncta F, G. *Q. E. D.*

Prop. VIII.

Fig. 272. Iisdem positis, sit punctum D in asymptoton unâ (M N), & reliqua eadem fiant: dico lineam, quæ à tactu (B) ad extremam partem (F) sumptæ (D F) ducitur, æquidistantem esse asymptoto (M N), in qua est punctum D.

a 34. 3. *huj.* b *hyp.* Nam ducatur B G ad M N parallela, ergo rursus E G [a] = (E D) [b] = E F, & puncta G, F coincidunt. *Q. E. D.*

Prop. IX.

Fig. 273. Si ab eodem puncto (D) ducantur duæ rectæ lineæ (D E, D F), quarum utraque coni sectionem, vel circuli circumferentiam in duobus punctis secet; & quam proportionem habent totæ lineæ (E D, F D) ad portiones (D H, D G), quæ extra sumuntur, in eam dividantur, quæ sunt intra (E H, F G); ita ut partes ejusdem rationis ad idem punctum conveniant (E D. D H :: E K. K H. & F D. D G :: F L. L G), quæ per divisiones (L, K) ducitur linea, sectioni in duobus punctis occurret; & quæ ab occursu ad punctum (D) extra sumptum ducuntur, sectionem contingent.

a 49. 2. *huj.* b *cor.* 1. 4. *h.* A puncto D [a] ducantur contingentes D A, D B; & conjungatur A B. hæc [b] secat D E in K; [b] & D F in L. unde liquet propositum.

Prop. X.

Hæc quidem communiter in omnibus, at in sola hyperbola, si alia quidem eadem sint, unius autem rectæ lineæ occursus contineant occursus alterius; & punctum D sit intra angulum asymptotis comprehensum, eadem prorsus evenient, quæ dicta sunt, ut in secundo theoremate tradidimus.

Prop. XI.

Iisdem positis, si unius lineæ occursus occursus alterius non contineant, & punctum D sit intra angulum asymptotis comprehensum, & figura, & demonstratio eadem erit, quæ in tertio theoremate.

Prop. XII.

Iisdem positis, si unius lineæ (D F) occursus (F, G) alterius (D E) occursus (E, H) contineant; & sumptum punctum (D) sit in angulo (P R X) deinceps ei, qui asymptotis (P O, N X) comprehenditur; linea per divisiones (K L) ducta, si producatur, occurret oppositæ sectioni; & quæ ab occursibus ducuntur ad punctum D, oppositas sectiones contingent. Fig. 274.

Ex D ducantur contingentes D M, DS; & connectatur M S: hæc [a] secat ipsam D E in K, ipsámque D F in L. unde liquet propositum. a *cor.* 4.4. *huj.*

Prop. XIII.

Iisdem positis, si punctum D sit in una asymptoton, & reliqua eadem existant; quæ per divisiones (K L) transit linea, asymptoto (OP) in qua est punctum, æquidistabit; & producta occurret sectioni; quæ vero ab occursu ad punctum (D) ducitur, sectionem continget. Fig. 275.

Itidem liquet ex 5[a] hujus.

Prop. XIV.

Iisdem positis, si punctum D sit in una (P O) asymptoton; & linea quidem D E sectionem in duobus punctis secet; D G verò alteri asymptoto (N X) æquidistans, secet in uno tantùm, quod sit G; fiátq; ut E D ad D H, ita E K ad K H; & ipsi D G ponatur æqualis G L; quæ per puncta K, L transit linea & asymptoto (O P) æquidistabit, Fig. 276.

 &

& ſectioni occurret: quæ verò ab occurſu (B) ducitur ad D, ſectionem continget.

Nam ductâ contingente D B, & per tactum B ductâ ad aſymptoton
a cor. 1. 4. huj. O P parallelâ; ſecabit hæc [a] ipſam D E in K, [b] ipſámque D G in L.
b cor. 6. 4. huj. unde liquet propoſitum.

Prop. XV.

Fig. 277. Si in ſectionibus oppoſitis (A, B) inter duas ſectiones ſumatur aliquod punctum (D), & ab ipſo duæ lineæ ducantur; altera quidem (DF) contingens unam oppoſitarum, altera vero (A B) utramque ſecans; & quam proportionem habet linea (A D) inter ſectionem (A) quam non contingit, & punctum (D) interjecta ad lineam (D B), quæ eſt inter punctum & alteram ſectionem (B), eandem habaet linea quædam (A C) major eâ (A B), quæ inter ſectiones interjicitur, ad exceſſum ipſius (C B) in eadem recta, & ad eundem terminum (B) cum linea ejuſdem rationis; quæ à termino (C) majoris lineæ (A C) ad tactum (F) ducitur, occurret ſectioni, & quæ ab occurſu ducitur ad ſumptum punctum (D), ſectionem continget.

a 49. 2 huj. Ex D [a] ducatur tangens altera D E; & connectatur F E. Hæc ſe-
b 36. 1 huj. cat A C in C; ſi negas, ſecet alibi in G. ergo erit A G. G B [b] :: (A D.
c hypoth. D B [c] ::) A C. C B. & dividendo A B. G B :: A B. C B. [d] unde G B
d 7. 5. = C B. ergo G, & C ſunt idem punctum.

Prop. XVI.

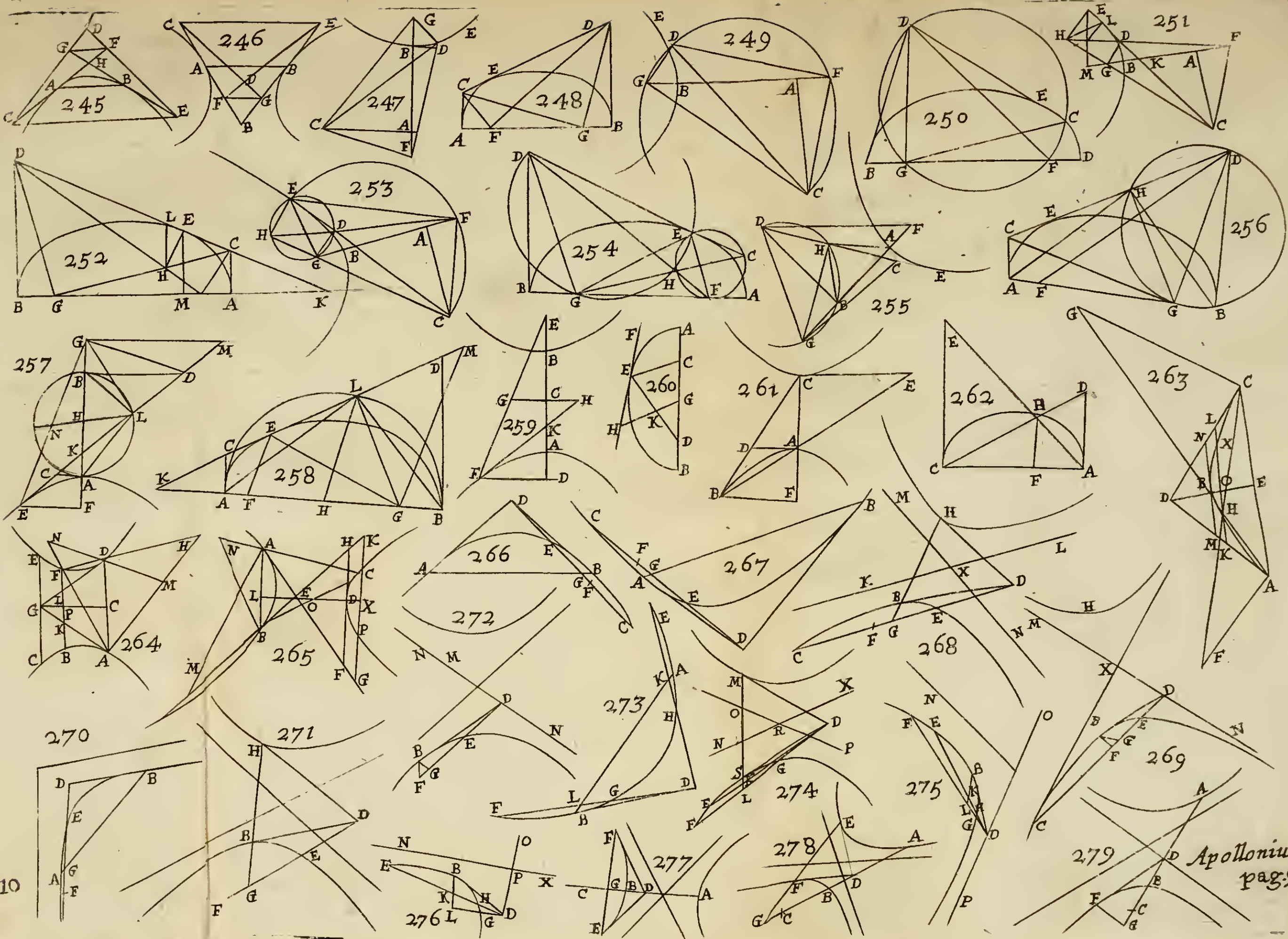
Fig. 278. Iiſdem poſitis ſit punctum D in angulo deinceps ei, qui aſymptotis continetur, & reliqua eadem fiant: dico lineam à puncto F ad C productam occurrere oppoſitæ ſectioni; & quæ ab occurſu ducitur ad D, eandem ſectionem contingere.

Ducatur ex D tangens altera D E; & connectatur E F, ſecans A B
a 49. 2 huj. in G. ergo A G. G B [b] :: (A D. D B [c] ::) A C. C B. unde dividen-
b 39. 3. huj. do A B. G B :: A B. C B. ergo G B [d] = C B. ergo puncta C, G co-
c hyp. incidunt. *Q. E. D.*
d 7. 5.

Prop. XVII.

Fig. 279. Iiſdem poſitis ſit punctum D in una aſymptoton: dico lineam, quæ ab F ad C ducitur, aſymptoto, in qua eſt punctum (D) æquidiſtare

Sit



10

Apollonius. pag.92

Sit F G asymptoto parallela. ergo rursus A G. G B [a]:: (AD. DB [b]::) A C. C B. & dividendo A B. G B :: A B. C B. ergo G, & C sunt idem punctum. [c] *Q. E. D.* a *36. 3 huj.* b *hyp.* c *ut in præc.*

Prop. XVIII.

Si in sectionibus oppositis sumatur aliquod punctum (D) inter duas sectiones, & ab ipso ducantur duæ lineæ (A B, C H), utramque sectionem secantes; & quam proportionem habent interjectæ (A D, C D) inter unam sectionem, & punctum (D) ad eas, (D B, D H), quæ inter idem punctum (D) & alteram sectionem interjiciuntur, eandem habent lineæ (A K, C G) majores iis (A B, C H), quæ sunt inter sectiones oppositas, ad excessus ipsarum (K B, G H); quæ per terminos (K, G) majorum linearum transeunt, occurrent sectionibus; & quæ ab occursibus ad sumptum punctum (D) ducuntur, sectiones contingent. Ponatur D inter asymptotos. Fig. 280.

Per D [a]ducantur contingentes D E, D F, & connectatur E F; secat hæc [b] ipsam A B in K, [b]ipsamque C H in G. ergo liquet propositum. a 49. 2 *huj.* b 15. 4. *huj.*

Prop. XIX.

Sumatur punctum D in angulo deinceps ei, qui asymptotis continetur, ducantúrque rectæ lineæ (A B, C H) sectiones secantes, & ut dictum est dividantur (in K, G): dico eam, quæ per K G producitur, occurrere utrique sectionum, & quæ ab occursibus ducuntur ad D, sectiones contingere. Fig. 281.

Rursus enim per D [a]ducantur contingentes D E, D F; [b]secabit juncta F E ipsam A B in K, ipsamque C H in G. unde constat propositum. a 49. 2. *huj.* b 16. 4. *huj.*

Prop. X X.

Si sumptum punctum (D) sit in una asymptoton, & reliqua eadem fiant; linea (KG), quæ transit per terminos (K,G) excessuum, asymptoto, in qua est punctum (D) æquidistabit; & quæ à puncto (D) ducitur ad occursum sectionis, & lineæ (K G) per terminos transeuntis, sectionem continget. Fig. 282.

Nam pariter [a] ductâ tangente D F, ducta per tactum F ad asymptoton parallela [b]secabit A B in K, & C H in G. ergo res constat. a 49. 2 *huj.* b 17. *hujus.*

Prop.

Prop. XXI.

Fig. 283. Sint rurſus oppoſitæ ſectiones A, B, ſitque punctum D in una aſymptoton, & linea quidem D B K in uno tantùm puncto occurrat ſectioni B, alteri aſymptoto æquidiſtans, linea verò C D H G utrique ſectioni occurrat; & ut C D ad D H, ita C G ad G H, & ipſi D B æqualis ſit B K. Dico lineam, quæ per puncta K, G tranſit, occurrere ſectioni, aſymptotóque, in qua & punctum D, æquidiſtare; & quæ ab occurſu ad punctum D ducitur, ſectionem contingere.

a 6. 4. *hujus.* b 15. *hujus.* Ductâ enim tangente D F, & F G parallelâ aſymptoto (in qua D); ſecabit F G [a] ipſam D B in K, [b] ipſámque C H in G. unde conſtat.

Prop. XXII.

Fig. 284. Sint ſimiliter oppoſitæ ſectiones, aſymptotique, & punctum D ſumatur in angulo deinceps ei, qui aſymptotis continetur; linea verò C D H ſecet utraſque ſectiones, & D B alteri aſymptoto æquidiſtat; ſitque ut C D ad D H, ita C G ad G H, & ipſi D B æqualis ponatur D K: dico lineam quæ per puncta K, G tranſit, occurrere utrique oppoſitarum ſectionum; & quæ ab occurſibus ducuntur ad D ſectiones eaſdem contingere.

Itidem patet ut in 6ta, & 16ta hujus libri.

Prop. XXIII.

Fig. 285. Sint itidem oppoſitæ ſectiones A B; punctúmque D ſit in angulo deinceps ei, qui aſymptotis continetur; & linea quidem B D ſectionem B in uno puncto tantùm ſecet, alteri aſymptoto æquidiſtans; linea verò D A ſimiliter ſecet ſectionem A, ſitque D B ipſi B G æqualis, & DA ipſi A K; dico lineam, quæ tranſit per K G occurrere ſectionibus; & quæ ab occurſibus ad D ducuntur, ſectiones contingere.

Patet ut in ſexta.

Prop. XXIV.

Fig. 286. Coni ſectio (D A B C) coni ſectioni vel circuli circumferentiæ (E A B C) non occurrit, ita ut pars quidem eadem ſit, pars verò non communis.

Si

Si affirmas, in parte communi ABC sumatur punctum H utcunque, & connectatur A H; & huic parallela ducatur D C; ipsámque A H bisecet diameter B G F. Itaque (ob sectionem E B C) [a] erit E F = F C. & (propter sectionem D B C) D F [a] = F C. [b] proinde E F = D F. *Q. E. A.* a 46. & 47. 1. b 1 *ax.* (*huj.*

Prop. XXV.

Coni sectio coni sectionem, vel circuli circumferentiam in pluribus punctis, quàm quatuor non secat. Fig. 287.

Si fieri potest, secet quinque punctis A, B, C, D, E proximis: conjungantur rectæ A B, D C, quæ primò occurrant, (ut semper [a] fit in parabola & hyperbola) in L. [b] fiátque A L. L B :: A O. O B. [b] & DL. L C :: D P. P C. jungatúrque O P, sectionibus occurrens punctis R, H. [c] ergo ductæ L R, L H sectiones contingent: ducatur E L, sectionibus occurrens in M, G. erítque E N. N M ([d] :: E L. L M) [e] ⊏ (E L. L G [d] ::) E N. N G. [f] unde N M ⊐ N G. [g] *Q. E. A.* a 24. & 25. 2. *hujus.* b 10. 6. c 9. 4 *hujus.* d 37. 3 *h.* e 8. 9. f 10. 5. g 9. *ax.*

Sin parallelæ sint A B, D C (ut fieri potest in ellipsi & circulo), bisecentur ipsæ in O, & P; & connexa O P sectionibus occurrat in R, H. [h] quare R H est diameter, ad quam ordinatim applicantur A B, D C; eísque parallela E G (per E ducta). [k] unde erit utraque E G, E M bisecta in N. ac propterea N G = N M. *Q. E. A.* Fig. 288. h 28. 1. *huj.* k 10. *def.* 1. *h.* l 9. *ax.*

Prop. XXVI.

Si dictarum linearum aliquæ in uno puncto (A) sese contingant, non occurrant sibi ipsis ad alia puncta Plura quàm duo. Fig. 289.

Si fieri potest, occurrant tribus punctis B, C, D proximè sitis; [a] ducatúrque tangens A L, occurrens ductæ B C in L; [b] fiat autem B L. C L :: B P. P C; & connexa A P sectionibus occurrat in H, & R. [c] ergo ductæ L H, L R contingent sectiones: itaque ducta D L, absurditatem incurremus, pariter ac in præcedenti. Sin B C, A L non conveniant, (in ellipsi nempe, & circulo) similiter consequetur absurdum. a 49. 2. *huj.* b 10. 6. c 9 *hujus.*

Prop. XXVII.

Si prædictarum linearum aliquæ in duobus punctis (A, B) sese contingant, in alio puncto sibi ipsis non occurrent. Fig. 290. 291.

Occurrant, si fieri potest, in C; primò extra contactus. 292.

Du-

Ducantur tangentes A L, B L, quæ si occurrant in L, ductâ C L,
a 27. 2 *hujus.* incurritur absurditas, ut in 25ma. Sin tangentes parallelæ sint, [a] erit
b 10. *def.* 1. *h.* quoque A B utriusque sectionis diameter, ac [b] idcirco N M [b]= (NC
c 9. *ax.* [b]=) N G. [c] *Q. E. A.*

Sin punctum C sit intra contactus, rursus ducantur tangentes A L,
d 29. 2. *huj.* B L, & connexa A B bisecetur in F, [d] eritque F L diameter; unde si ducatur C G M ad A B parallela, [b] erit utraque C G, C M bisecta in K; unde K G = K M. [c] *Q. E. A.*

Prop. XXVIII.

Fig. 293. Parabole (A G B) parabolen (A M B) non contingit, præterquam in uno puncto.

Si fieri potest, contingant se parabolæ punctis (A, B), à quibus ducantur tangentes A L, B L, concurrentes in L. junctámque A B bi-
a 29. 2 *huj.* secet recta L F. [a] hæc diameter erit utriusque sectionis; [b] unde L F
b 35. 1 *huj.* bisecta est in G, & M. [c] *Q. E. A.*
c 9. *ax.*

Prop. XXIX.

Fig. 293. Parabole (A G B) hyperbolen (A M B) non contingit in duobus punctis, extra ipsam cadens.

a 29. 2 *huj.* Tangat, si fieri potest, punctis A, B, à quibus ducantur tangentes
b 37. 1. *huj.* A L, B L; junctámque A B bisecet recta L F; [a] hæc utriusque secti-
c 19. 5. onis erit diameter. Sit D centrum hyperbolæ; eritque F D. D M [b]::
d 14. 5. (D M. D L [c]::) F M. M L. quare, cùm F D ⊏ D M, [d] erit F M
e 35. 1. *huj.* ⊏ M L. ergo F M ⊏ G L. atqui F G [e] = G L. ergo F M ⊏ F G.
f 9. *ax.* [f] *Q. E. A.*

Prop. XXX.

Fig. 293. Parabola (A M B) ellipsim vel circuli circumferentiam (A G B) non contingit in duobus punctis (A, B) intra ipsam cadens.

a 37. 1 *huj.* Si affirmas, ducantur tangentes A L, B L, & rectam A B iterum
b 19. 5. bisecet diameter F G, in qua sit D centrum ellipsis, vel circuli. Estque
c 14. 5. L D. D G [a]:: (D G. D F [b]::) L G. G F. [c] ergo L G ⊏ G F. atqui F G
d 9. *ax.* = G L. quæ [d] repugnant.

Prop.

Prop. XXXI.

Hyperbole (A G B) hyperbolen (A M B), idem centrum (D) habens, in duobus punctis (A, B) non continget. Fig. 293.

Si dicas contingere, ducantur contingentes A L, B L; & juncta DL producatur: [a]bisecabit utique hæc tactus conjungentem A B, in F; éstque (propter hyperbolen A G B) D Gq [b]= F D × D L. & (ob hyperbolen A M B) D Mq [b]= F D × D L. [c]quare D Gq = DMq. [d] *Q. E. A.*

a 30. 2. *huj.*
b 37. 1. *h.*
c 1. *ax.*
d 9. *ax.*

Prop. XXXII.

Si ellipsis (A M B) ellipsin, vel circuli circumferentiam, (A G B), habens idem centrum (D), in duobus punctis (A, B) contingat, linea (A B) conjungens tactus, per centrum (D) transibit. Fig. 294.

Nam ductis contingentibus A L, B L, siquidem A B per centrum [a]non transit, [b]hæ convenient, puta in L. erítque juncta L D [c] diameter utriusque sectionis; & proinde in una, D Gq [d]= D L × L F; in altera, D Mq [d]= D L × L F. [e]unde D Gq = D Mq. [f] *Q. E. A.*

a *hyp.*
b 27. 2 *huj.*
c *cor.* 51. 1. *h.*
d 37. 1 *huj.*
e 1. *ax.*
f 9. *ax.*

Prop. XXXIII.

Coni sectio, vel circuli circumferentia (A B C) coni sectioni, vel circuli circumferentiæ (A D B E C), quæ non ad easdem partes connexa habeat, ad plura puncta quàm duo non occurret. Fig. 295. 296.

Si fieri potest, occurrant tribus punctis A, B, C; liquétque rectas A B, C B continere angulum, ad partes in quibus sunt concava lineæ (A B C). paritérque eædem angulum continent ad partes, in quibus concava lineæ A D B E C. ergo lineæ A B C, A D B E C concava habent ad easdem partes, contra hypothesin.

Prop. XXXIV.

Si coni sectio, vel circuli circumferentia (ABF) occurrat uni (ACF) oppositarum sectionum in duobus punctis (A, F); & lineæ (A B F, A C F) quæ inter occursum interjiciuntur ad easdem partes concava habeant; producta linea (A B F) ad occursus, alteri (D) oppositarum sectionum non occurret. Fig. 297.

O Nam

a 33. 2 *huj.* Nam recta A F sectioni D [a] non occurret, ergo nec sectio A B F.

Prop. XXXV.

Fig. 298. Si coni sectio, vel circuli circumferentia (A B C) occurrat uni (A) oppositarum sectionum (A, B); non occurret ipsarum reliquæ (B) ad plura puncta, quàm duo (B, C).

Nam ut occurrat pluribus, repugnat 33æ hujus.

Prop. XXXVI.

Coni sectio, vel circuli circumferentia oppositis sectionibus ad plura puncta, quàm quatuor non occurret.

a 35. 4. *huj.* Etenim si uni occurrat, reliquæ ad plura puncta [a] non occurret, quàm duo.

Prop. XXXVII.

Fig. 299. Si coni sectio, vel circuli circumferentia (C A D) unam oppositarum sectionum (A) concavâ sui parte contingat, alteri oppositarum (B) non occurret.

a 49. 2.
b *cor.* 32. 1. *h.*
c 33. 2. *h.*

Per contactum A [a] ducatur recta E F tangens, [b] utramque sectionem. [c] hæc sectioni B non occurret, ergo nec linea C A D.

Prop. XXXVIII.

Fig. 300. Si coni sectio, vel circuli circumferentia (A B C) utramque oppositarum sectionum (A, B) contingat in uno puncto (A & B); oppositis sectionibus in alio puncto non occurret.

a *cor.* 32. 1. *h.*
b 33. 2.

Ducantur rectæ A D, B E contingentes sectiones A, B; [a] hæ lineam A B C etiam contingunt. [b] ergo (inclusa his) linea A B C non occurret sectionibus A, B.

Prop. XXXIX.

Fig. 301. Si hyperbole (A B C) oppositarum sectionum uni (A B D) in duobus punctis occurrat, convexa habens è regione sita, quæ ipsi (A B C) opponitur sectio (E), oppositarum alteri (F) non occurret.

Con-

Conjungatur A B; [a] hæc neutri ſectionum E, F occurret. ergo nec ipſæ E, F (quibus illa interjacet) ſibi occurrent. a 33. 2 *huj.*

Prop. XL.

Si hyperbole (A C B) utrique oppoſitarum ſectionum (A, B) occurrat; quæ ipſi opponitur ſectio, nulli oppoſitarum in duobus punctis occurret. Fig. 302.

Si fieri poteſt, occurrat ſectioni A punctis D, E. [a] ergo recta D E neutri ſectionum C, B occurret. Quare nec ipſæ ſectiones C, B convenient, contra hypotheſin. a 33. 2 *huj.*

Similiter, ſectio E non continget utramque A, B. Nam ducta tangens H E [a] neutri C, B occurret; ergo nec ipſæ, itidem contra hypoth.

Prop. X L I.

Si hyperbola (C A B D) utramque oppoſitarum ſectionum (A, B) duobus punctis (C, A; D, B) ſecet, convexa habens è regione ſita; quæ ipſi opponitur ſectio (E F) nulli oppoſitarum (A, B) occurret. Fig. 303.

Sint K G L, M N G aſymptoti ſectionum A B, E F. liquet rectam C A [a] occurrere aſymptoto L G ad partes K, (non ad L); & rectam D B ad partes M, (non ad partes N,) [a] occurrere aſymptoto N G, adeóque [b] angulum P H R continere angulum N G L, & propterea ſectionem E F. Atqui C A [c] non occurrit ſectioni D B O, nec D B ſectioni C A X. ergo rectæ C A R, D B P ſectionibus C A X, & E F; ſectionibúſque D B O, & E F interjacent; & proinde ſectio E F neutri C A X, D B O occurret. *Q. E. D.*

a 8. 2 *huj.*
b 25. 2 *huj.*
c 33. 2 *huj.*

Prop. X L I I.

Si hyperbole unam oppoſitarum ſectionum in quatuor punctis (A, B, C, D) ſecet, quæ ipſi opponitur ſectio (K), non occurret alteri oppoſitarum (E). Fig. 304.

Occurrat, ſi fieri poteſt, in K; junctæque A B, D C [a] conveniant productæ in L; & [b] fiat A L. L B :: A P. P B. & D L. L C :: D R. R C. [c] ergo connexa P R ſectionibus occurret, [c] & quæ ab L ad occurſus ducuntur, ſectiones contingent; [d] eritque proinde (ob ſectionem A F D) F L. N L :: N K. K L; [d] & (propter ſectionem A M D) N F. F L :: N M. M L. [e] quare N K. K L :: N M. M L. *Q. E. A.*

a 25. 2 *huj.*
b 10. 6.
c 9. *huj.*
d 36. 1. *huj.* & 16. 5.
e 11. 5.

Prop. XLIII.

Fig. 305. Si hyperbole (ACB) oppositarum sectionum (A B, C) alteri (AB) in duobus punctis (A, B) occurrat, concava habens ad easdem partes; alteri verò (C) occurrat in uno puncto (C); quæ ipsi (A C B) opponitur sectio (D), nulli oppositarum (AB, C) occurret.

a 33.2 *huj.* b 34.4 *huj.* Conjungantur (AC, B C; [a] hæ non occurrent sectioni D; & quoniam sectioni A B occurrunt, [b] non secabunt alibi sectionem C; ergo sectionem D continet sectio C; unde liquet propositum.

Prop. XLIV.

Fig. 306. Si hyperbole (A M B C) uni (A B C) oppositarum sectionum (A B C), D E F) occurrat in tribus punctis (A, B, C); quæ ipsi opponitur (D E K) alteri oppositarum (D E F) præterquam in uno puncto non occurret.

Si fieri potest, occurat punctis D, E; junganturque A B, D E;
a 36.2 *huj.* sintque hæ primò parallelæ, & bisecentur rectâ G H; [a] eritque GH
b 48.1 *huj.* sectionum diameter; ductâ igitur per C ipsi B A parallelâ C X, pro-
c 9. *ax.* ductáque H G ad N, [b] erit utraque C X, C O bisecta in N. [c] *Q. E. A.*

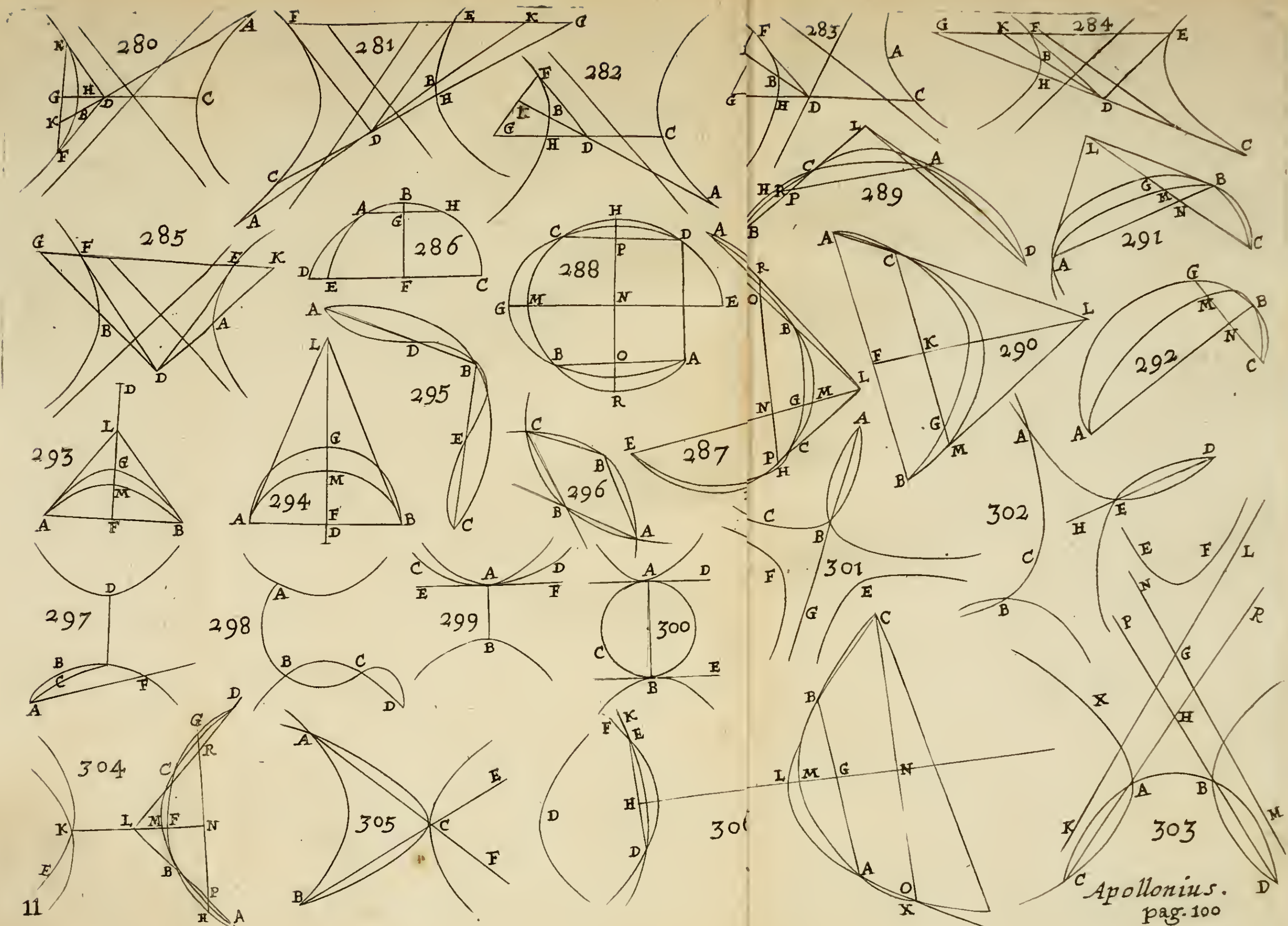
Fig. 307. Sin A B, D E conveniant in P, per C ducatur O C R ad A P parallela, & protrahatur D P R. Bisecentur autem A B, D E punctis H, G; per quæ ducantur diametri G S, H S; & rectæ I T, L T, M Y se-
a 5.2 *hujus.* ctiones contingant; [a] unde I T ad D P, & [a] L T ad A P, [a] & M Y ad
b 19.3 *huj.* O R (vel A P) erunt parallelæ. quare O R × R C. D R × R E [b]::
c 9.5. (L Tq. T Iq [b]:: A P × P B. D P × P E [b]:: M Y q. Y Iq [b]::) X R ×
d 9. *ax.* R C. D R × R E. [c] unde O R × R C = X R × R C. [d] *Q. E. A.*

Prop. XLV.

Fig. 308. Si hyperbole (ABD) unam (D) oppositarum sectionum (ABC, D) contingat, alteram verò (A B C) secet in duobus punctis (A, B); quæ ipsi opponitur sectio (C E) nulli oppositarum (A B C, D) occurret.

Occurrant, si fieri potest, in C; jungatúrque A B F, cui occurrat
a *in* 25.2 *huj.* tangens DF; [a] erit occursus F intra asymptotos sectionis ABD. ergo
c 33 *huj.* ducta CF cadit intra angulum B F D. atqui tangens D F [c] non occurrit sectioni A B C. ergo C F extra ang. B F D cadit, quæ repugnant.

Prop.



Apollonius.
pag. 100

11

Prop. XLVI.

Si hyperbole (A G C) unam (A B C) oppositarum sectionum (A B C, D) in uno puncto (A) contingat, & secet in duobus punctis (B, C), quæ ipsi opponitur sectio (E) alteri oppositarum (D) non occurret. Fig. 309.

Si fieri potest, occurat in D; jungatúrque C B, cui occurrat tangens A F. [a] erit F intra asymptotos: ducatur D F sectiones secans in G, K. [b] sitque C F. F B :: C L. L B; & connectatur A L M N. ergo ductæ F M, F N [c] sectiones contingent; eritque [d] proinde X G. G F :: X D. D F (ob sectionem A G M); & X K. K F :: X D. D F. (propter sectionem A K N). [e] quare X G G F :: X K. K F. *Q. E. A.*

a 25. 2.
b 10. 6.
c 1 *hujus.*
d 36. 1 *hujus.* & 16. 5.
e 11. 5.

Prop. XLVII.

Si hyperbole (D A C) unam (A B C) oppositarum sectionum (A B C, E F G) contingens, in alio puncto (C) secet; quæ ipsi D A C opponitur sectio (E F H) alteri oppositarum (E F G) non occurret præterquam in uno puncto. Fig. 310.

Occurrat punctis E, F; jungatúrque E F. Sitque primò E F tangenti A K parallela; ergo quæ bisecat ipsam E F, [a] diameter per A transit; sit hæc A L; pérque C ducatur C B ad A K parallela; [b] bisecta est igitur utraque B C, D C in L. [c] *Q. E. A.*

a 34. 2 *huj.*
b 48. 1. *huj.*
c 9. *ax.*

Sin E F, A K conveniant (in K); ideóque E F, B C (in N); bisecet diameter A M ipsam E F, sectiones secans punctis X, O; per quæ ducantur contingentes X P, O R, [d] rectæ E F, ac proinde invicem paralelæ; eritque D N × N C. E N × N F [e] :: (A Pq. P Xq [f] :: A Rq. R Oq [e] ::) B N × N C. E N × N F: [g] quare D N × N C = B N × N C. [h] *Q. E. A.* Fig. 311.

d 34. 2 *huj.*
e 19. 3 *huj.*
f 4. & 22. 6.
g 9. 5.
h 9. *ax.*

Prop. XLVIII.

Si hyperbole (A C) unam (A B) oppositarum sectionum (A B, D E G) in uno puncto (A) contingat; quæ ipsi (A C) opponitur sectio (D E F) oppositarum alteri (D E G) non occurret ad plura puncta, quàm duo. Fig. 312, 313.

Si fieri potest, occurrat quoque in H; ducatúrque A K utramque sectionem A B, A C contingens, & conjungatur D E, quæ primò parallela sit ipsi A K. Bisecetur D E in L, & connectatur A L: [a] est hæc oppositarum diameter: ductâque H X G F ad D E parallelâ, erit X G [b] = (X H [b] =) X F. *Q. E. A.*

a 34. 2 *huj.*
b 10 *def* 1 *h.*
c 9. *ax.*

Sin

Sin D E non sit ad A K parallela, occurrat ei in K, reliquisque peractis ut prius, producta F H ipsi A K occurrat in R. quare G R × RH.
d 19.3. *huj.* R Aq [d]:: (D K × K E. A Kq ::) F R × R H. R Aq. [e] ideóque G R ×
e 9.5. R H = F R × R H. [c] *Q. E. A.*

Prop. XLIX.

Fig. 314. Si hyperbole (A B) utramque oppositarum sectionum (A, B) contingat, quæ ipsi opponitur sectio (E), nulli oppositarum (A, B) occurret.

Ducantur enim A D, B G, quæ contingant sectiones; [a] liquet has
a 25. 2. *huj.* intra asymptotos sectionis A B convenire. [b] ideóque asymptotis secti-
b 33. 2. *huj.* onis E non occurrere, sed eas continere, & multò magis sectionem E. Cùm igitur tangens A C [b] non occurrat sectioni B G, nec tangens B C [b] sectioni A D, neutri harum occurret sectio E. *Q. E. D.*

Prop. L.

Fig. 315. Si utraque oppositarum sectionum (A, D) in uno puncto (A & D) contingant, ad easdem partes concava habens, in alio puncto non occurrent.

a 47.4. *huj.* Si fieri potest, sectiones D occurrant in E; ergo sectiones A [a] non
b 39. 2. *huj.* occurrent præterquam in uno puncto A. ducantur contingentes A H,
c 10. *def.* 1. *h.* D H, junctæque A D sit parallela E B C; & per H ducatur H K diameter secunda sectionum oppositarum; [a] bisecabit hæc ipsam A D in K, [c] ideóque utramque E B, E C in L. *Q. E. A.*

Prop. LI.

Fig. 316. Si hyperbole (A C B) oppositarum sectionum unam (A D B) contingat in duobus punctis (A, B); quæ ipsi opponitur sectio (F) oppositarum alteri (E) non occurret.

Si fieri potest, occurrat in E, ducantúrque sectionum contingentes A G, B G; & connectantur A B, E G, & producta E G sectionibus
a 36. 1. *huj.* occurrat in C, D, rectæque A B in H. Erit igitur H D. D G [a]::(H E.
b 14.5. E G [a]::) H C. C G. ergo quum H D ⊐ H C, [b] erit D G ⊐ C G.
c 9 *ax.* [c] *Q. E. A.*

Prop.

Prop. LII.

Si hyperbole (A D) oppositarum sectionum unam (A) contingat (in A), convexa habens è regione sita; quæ ipsi opponitur sectio (F) oppositarum alteri (B) non occurret. Fig. 317.

Ducatur enim A C tangens sectiones; [a] hæc neutri sectionum B,F occurret; sed inter ipsas cadet; ergo nec ipsæ sectiones occurrent. *Q. E. D.* [a] 33. 2 *hujus.*

Prop. LIII.

Oppositæ sectiones (A B C D, E F) oppositas (A B, C D) non secant in pluribus punctis, quàm quatuor.

Nam quum sectiones convexa habent sibi obversa, si 1°, sectio A B C D* secet utramque A B, C D in quatuor punctis(A, B, C, D), [a] liquet E F neutri reliquarum A B, C D occurrere. *1. Fig. 318. [a] 41. *hujus.*

Sin 2dò, sectio A B C sectionem A B* secet in duobus punctis(A, B,) ipsásque C D in uno E; non occurret ergo E F [b] ipsi C D; nec ipsi A B præterquam uno puncto; (si enim duobus, [c] ergo ei opposita A B C non omnino occurret alteri C D, contra hypoth.) *2. Fig. 319. [b] 39. *hujus.* [c] 41. *hujus.*

Sin 3°, Sectio A B C sectionem A B E secet punctis duobus A, B; [d] non occurret sectio E F sectioni D, nec sectioni A B E, præterquam duobus punctis. 3. Fig. 320. [d] 35. *hujus.*

Sin 4°, Sectio A B C D utramque A B, E F unico puncto secet, [e] nulli ipsarum occurret ipsa E F duobus punctis. 4. Fig. 321. [e] 40 *hujus.*

Sin Sectiones ad easdem partes concava habeant; & 5°, altera alteram in quatuor punctis (A, B, C, D) secet, [f] sectio EF neutri A B, C D occurret. Sin 6°, Sectio A B C alteri occurrat tribus punctis, [g] ipsa E F alteri in uno tantùm puncto occurret, idémque in reliquis. Nullo igitur modo oppositæ sectiones oppositis ad plura puncta convenient, quàm quatuor. 5. Fig. 322. 323. [f] 36. *hujus.* 6. Fig. 324. [g] 44. *hujus.*

Prop. LIV.

Si oppositæ sectiones (B C, E F) oppositas (A B, D) in uno puncto (B) contingant, non occurrent sibi ipsis ad alia puncta plura quàm duo. Fig. 325.

Habeant Sectiones convexa sibi invicem obversa, occurrátque primò Sectio B C ipsi D duobus punctis, C, D. [a] ergo Sectio E F neutri [a] A B, [b] C D occurret. [a] 39. *hujus.* [b] 52 *hujus.*

Sin 2ò, Sectio B C secet ipsam D semel in C, [c] ergo E F sectioni D, nusquam occurret, nec ipsi A B nisi in uno puncto (si enim duobus, Fig. 326. [c] 52 *hujus.*

[d] non

d 39 *hujus.* [d] non occurret BC ipſi D) contra hypotheſin).

Fig. 327. Sin 3ò, Sectio BC non occurrat ſectioni D, [e] nec EF ipſi D occurret, [f] ipſique AB occurret duobus tantùm punctis.

e 52 *hujus.*
f 35. *hujus.*

Sin Sectiones ad eaſdem partes concava habeant, ſimilis erit diſcurſus; conſtabitque omninò propoſitum.

Prop. LV.

Fig. 328. Si Sectiones oppoſitæ (AB, CD) oppoſitas (AC, EF) contingant in duobus punctis, in alio puncto ſibi ipſis non occurrent.

a 49. *hujus.* Contingant primò in AC. [a] ergo Sectio EF nulli ipſarum occurret.

b 51. *hujus.* Secundò, contingant in A, B; [b] itaque rurſus CD non occurret

Fig. 329. ipſi EF.

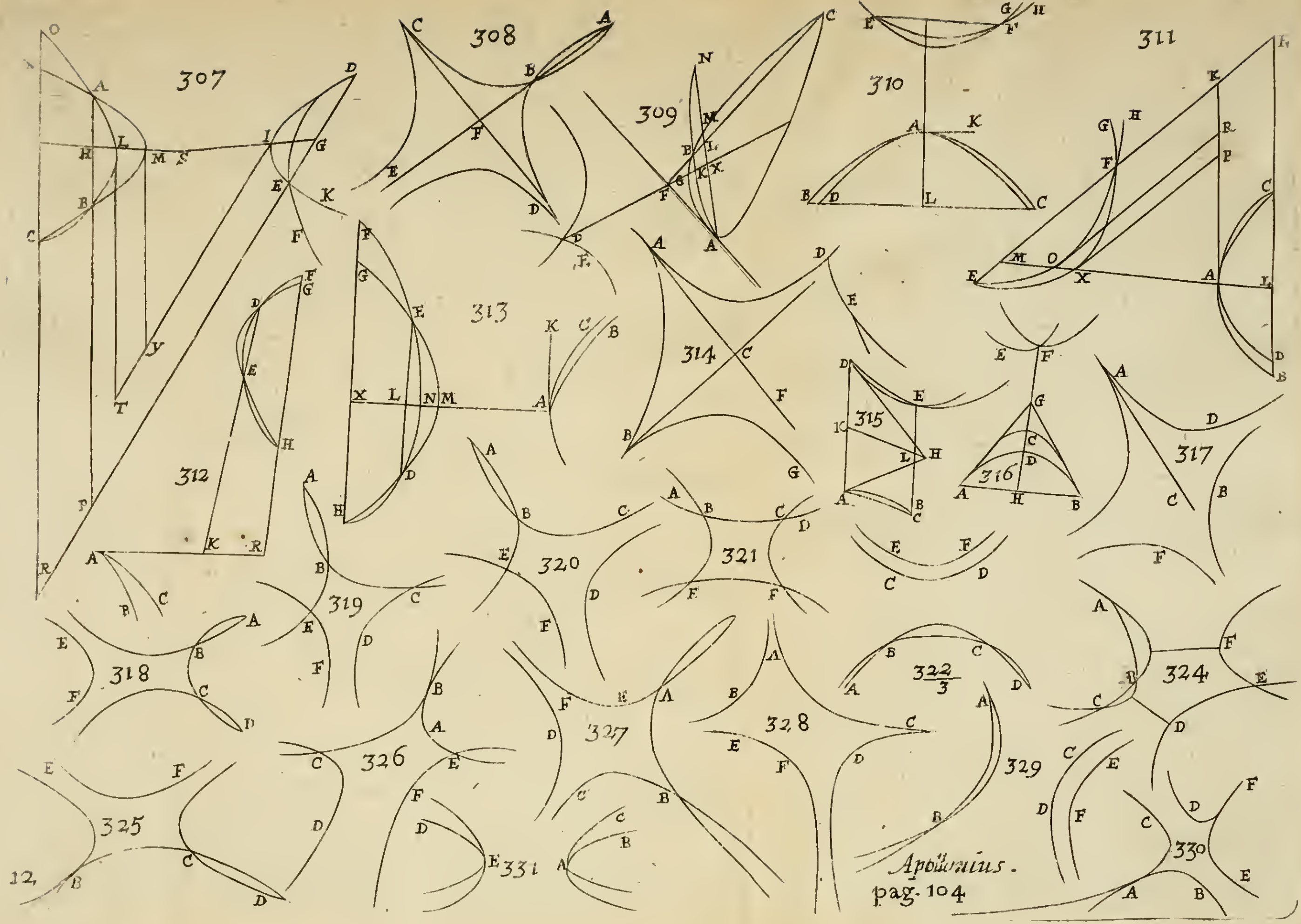
Fig. 330. Tertiò, contingat Sectio AC ipſam AB in A, & Sectio D ipſam

c 52. *hujus.* EF in F. [c] ergo nec Sectio EF Sectioni AB, nec Sectio CA ipſi DF occurret.

Fig. 331. Quartò, contingat AC ipſam AB in A, & EF ipſam D in E, ha-

d 50 *hujus.* bentes concava ad eaſdem partes, liquet ipſas neutiquam in alio puncto occurrere: quare omnino conſtat propoſitum.

LAUS DEO.



12,

Apollonius.
pag. 104